Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 3

МАТЕМАТИКА

А. В. ЧАКМАЗЯН

К ТЕОРИИ ДВОЙСТВЕННО НОРМАЛИЗУЕМЫХ m-МЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ V_m В E_n

(Представлено академиком А. Д. Александровым 24 VI 1970)

1. В этой заметке мы рассмотрим некоторые свойства двойственно-нормализуемой поверхности V_m, вложенной в эвклидово пространство E_n.

Будем говорить, что поверхность V_m в проективном пространстве P_n нормализуема двойственно, если она нормализуема в смысле А. П. Нордена ([1]) и ее нормаль первого рода содержит характеристику некоторого семейства гиперплоскостей, касающихся V_m.

Допустим, что V_m можно дополнить до гиперполосы так, чтобы характеристика семейства касательных гиперплоскостей была перпендикулярна к касательным плоскостям поверхности V_m. Очевидно, что тогда естественная нормализация V_m будет одновременно и двойственной, т. е. нормаль первого рода V_m будет вполне ортогональной к касательной плоскости поверхности и одновременно удовлетворяет условиям двойственной нормализации ([2]).

2. Пусть $x = x(u^1, u^2, \ldots, u^m)$ — радиус-вектор текущей точки поверхности V_m, $T_m(x)$ — ее касательная m-плоскость и $N_{n-m}(x)$ — ее нормальная $(n-m)$-плоскость. Присоединим к V_m подвижный полуортогональный репер $\{x, e_i, e_\alpha\}$, где e_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — линейно независимые векторы плоскости $T_m(x)$, а e_α $(\alpha = m+1, \ldots, n)$ — взаимно ортогональные векторы плоскости $N_{n-m}(x)$. Тогда

$$e_\alpha e_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad e_i e_\alpha = 0, \quad e_i e_j = g_{ij}, \tag{1}$$

где g_{ij} — метрический тензор поверхности V_m.

Уравнения инфинитезимального перемещения репера, присоединенного к поверхности, записываются в виде

$$dx = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_i^j e_j + \omega_i^\alpha e_\alpha, \quad de_\alpha = \omega_\alpha^i e_i + \omega_\alpha^\beta e_\beta. \tag{2}$$

Здесь ω_i — независимые линейные комбинации дифференциалов криволинейных координат u^i поверхности V_m. Остальные формы, входящие в эти уравнения, связаны соотношениями

$$\omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0, \quad \omega_\alpha^i + g^{ij}\omega_j^\alpha = 0, \quad dg_{ij} = g_{ih}\omega_j^h + g_{hj}\omega_i^h, \tag{3}$$

которые получаются при дифференцировании соотношений (1).

Из соотношений (2) следует, что

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j, \quad b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha, \tag{4}$$

где b_{ij}^α — коэффициенты асимптотических квадратичных форм поверхности V_m.

3. Присоединим к поверхности V_m гиперполосу, образованную ее касательными гиперплоскостями $\xi(x)$. Выберем репер, присоединенный к поверхности, так чтобы вектор e_n был ортогонален гиперплоскости $\xi(x)$, а векторы e_i, e_a $(a = m+1, \ldots, n-1)$ принадлежали этой гиперплоскости. Тогда

$$de_n = \omega_n^i e_i + \omega_n^a e_a,$$

и формы ω_n^i, ω_n^a линейно выражаются через дифференциалы параметров u^i.

Потребуем теперь, чтобы гиперполоса, образованная гиперплоскостями $\xi(x)$, определила двойственную нормализацию поверхности V_m. Тогда характеристикой семейства гиперплоскостей $\xi(x)$ будет пересечение этой гиперплоскости с нормалью $N_{n-m}(x)$ поверхности V_m. Эта характеристика определяется точкой x и векторами e_a. Условие принадлежности векторов e_a характеристике записывается в виде

$$e_a(e_n + de_n) = 0.$$

Эти уравнения приводят к системе уравнений Пфаффа $\omega_n^a = 0$, которая в силу (3) равносильна системе

$$\omega_a^n = 0. \tag{5}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (5), получим

$$\omega_a^i \wedge \omega_i^n = 0. \tag{6}$$

Имея в виду (3) и (4), запишем выражение (6) в виде

$$g^{kl} b_{li}^n b_{kj}^a \omega^i \wedge \omega^j = 0,$$

откуда следует, что

$$b^k{}_{[i} b_{|k|j]}{}^a = 0, \tag{7}$$

где $b_i^k = g^{kl} b_{li}^n$.

Условие (7) представляет собой условие перестановочности матрицы b_i^k с матрицами b_{kj}^a. Так как тензор g_{ij} положительно определенный, то его вместе с тензором b_j^i можно одновременно привести к диагональному виду.

Предположим теперь, что тензор b_j^i имеет различные собственные значения. Тогда из соотношений (7) следует, что тензоры b_{kj}^a должны приводиться к диагональному виду одновременно с тензором b_j^i. Следовательно, на поверхности V_m тензоры g_{ij}, b_{ij}^n, b_{ij}^a имеют общие главные направления. Эти главные направления будут взаимно сопряженными ортогональными направлениями поверхности V_m. Таким образом, если поверхность V_m допускает двойственную нормализацию и ее тензор b_j^i имеет различные собственные значения, то она несет ортогональную сопряженную сеть.

Теперь докажем обратное, т. е. допустим, что поверхность несет ортогональную сопряженную сеть. Тогда отнеся поверхность к этой сети, получим

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad b_{ij}^a = \delta_{ij} b_i^a. \tag{8}$$

Рассмотрим семейство гиперплоскостей $\xi(x)$, касательных к поверхности V_m. Выберем репер так, чтобы векторы e_n были нормальными к этим гиперплоскостям. Обозначим через e_a $(a = m+1, \ldots, n-1)$ векторы нормали $N_{m-n}(x)$, ортогональные векторам e_n. Так как

$$e_a de_n = \omega_n^a = -\omega_a^n,$$

то поверхность V_m будет двойственно нормализуемой, если $\omega_a^n = 0$. Но это уравнение в силу (8) будет вполне интегрируемым. Оно имеет решение, зависящее от $n - m - 1$ постоянных.

Следовательно, через каждую касательную гиперплоскость $\xi_0 = \xi_0(x)$, заданную в точке x_0 поверхности V_m, несущей ортогональную сопряженную сеть, проходит единственная гиперполоса, характеристика которой принадлежит нормали к поверхности, т. е. имеет место

Теорема 1. *Для того чтобы поверхность V_m общего типа, вложенная в эвклидово пространство E_n, допускала двойственную нормализацию, необходимо и достаточно, чтобы она несла ортогональную сопряженную сеть.*

4. Если в нормальной плоскости произвести замену базиса $\{e_\alpha\}$, то величины b_{ij}^α (при фиксированных i, j) преобразуются как компоненты вектора, и мы можем в нормальной плоскости $N_{n-m}(x)$ рассмотреть систему $m(m+1)/2$ векторов $b_{ij} = b_{ji} = b_{ij}^\alpha e_\alpha$. Пусть q — число независимых векторов этой системы. Эти векторы вместе с точкой x определяют q-плоскость $N_q(x) \subset N_{n-m}(x)$. Если векторы e_λ $(\lambda = m+1, \ldots, m+q)$ расположить в плоскости $N_q(x)$, то все векторы b_{ij} будут линейно выражаться через векторы e_λ: $b_{ij} = b_{ij}^\lambda e_\lambda$ и, следовательно, $b_{ij}^\sigma = 0$ $(\sigma = m + q + 1, \ldots, n)$.

Д. И. Перепелкин (3) рассматривает геометрическое место точек пересечения плоскости $N_q(x)$ с теми бесконечно близкими, плоскостями $N_{n-m}(x+dx)$, которые пересекают плоскость $N_q(x)$. Он называет это геометрическое место «многообразием k». Выясним, какой вид принимает «многобразие k» для двойственно нормализуемой поверхности V_m.

Многообразие k можно рассматривать как геометрическое место точек $y \in N_q(x)$, удовлетворяющих условию $dy \in N_{n-m}(x)$ (для некоторого смещения точек x на V_m). Относительно базиса $\{x, e_\lambda\}$ в плоскости $N_q(x)$ это многообразие определяется уравнением

$$\operatorname{Det} \left\| \sum_{\lambda=m+1}^{m+q} g^{ik} b_{kj}^\lambda y^\lambda - \delta_j^i \right\| = 0 \tag{9}$$

и представляет собой алгебраическую гиперповерхность порядка плоскости $N_q(x)$.

Если поверхность V_m является двойственно нормализуемой, то ее тензоры g^{ij} и b_{ij}^λ одновременно приводятся к диагональному виду, и уравнение (9) перепишется так:

$$\prod_{i=1}^{m} \sum_{\lambda=m+1}^{m+q} (g^{ii} b_{ii}^\lambda y^\lambda - 1) = 0 \tag{10}$$

(по индексу i здесь суммирования нет). Последнее уравнение показывает, что многообразие k поверхности V_m распадается на m плоскостей размерности $q-1$, принадлежащих плоскости $N_q(x)$.

Теорема 2. *Многообразие k m-мерной поверхности, допускающей двойственную нормализацию, распадается на m плоскостей размерности $q-1$.*

Выражаю искреннюю благодарность акад. А. Д. Александрову за ценные замечания и проф. М. А. Акивису за обсуждение результатов.

Ереванский
государственный университет

Поступило
10 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. П. Норден, Пространства аффинной связности, М., 1950. [2] А. В. Чекмазян, Докл. АН АрмССР, 28, № 4 (1959). [3] Д. И. Перепелкин, Матем. сборн., 42, № 1 (1935).