Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 4

УДК 511 *МАТЕМАТИКА*

А. Н. АНДРИАНОВ, О. М. ФОМЕНКО

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ МОДУЛЯРНОЙ ГРУППЫ И ЧИСЛА КЛАССОВ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ БИНАРНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 30 VI 1970)

1. Пусть $\Gamma' = \Gamma / \{\pm I\}$, $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$,— модулярная группа, действующая в верхней полуплоскости. Выводится (теорема 1) асимптотическая формула, включающая нормы гиперболических классов (класс = класс сопряженных элементов в Γ'). В следствии теоремы 1 изучается распределение норм гиперболических классов. Из теоремы 1 вытекает также асимптотическая формула, включающая числа классов неопределенных бинарных квадратичных форм (теорема 2). Для групп 2×2 матриц с компактными фундаментальными областями аналогичные результаты получил Ямада [1].

2. Пусть P_α $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ — примитивные гиперболические элементы группы Γ', $\{P_\alpha\}$ — соответствующие примитивные гиперболические классы. Любой гиперболический класс K имеет вид $\{P_\alpha^\nu\}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots;\ \nu = 1, 2, \ldots)$, где $\nu = \nu(K)$ зависит лишь от класса K; $N(K)$ — норма класса K (и любого его представителя). Как и в [1], доказательство теоремы 1 базируется на изучении дзета-функции $Z(s)$ Сельберга [2] (для Γ') с помощью стандартных аналитических приемов. Напомним, что

$$Z(s) = \prod_{\alpha} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - N\{P_\alpha\}^{-s-n}) \quad (\operatorname{Re} s > 1).$$

Отсюда легко получаем

$$\frac{Z'}{Z}(s) = \sum_{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log N\{P_\alpha\}}{1 - N\{P_\alpha\}^{-n}} \frac{1}{N\{P_\alpha\}^{ns}}.$$

Пусть

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^s}{s^3} \frac{Z'}{Z}(s)\, ds;$$

интегрирование идет по отрезку $[\alpha, \beta]$. Стандартные рассуждения дают

$$I(2 - i\infty, 2 + i\infty) = {}^1/_2 \sum_{N\{P_\alpha\}^n < x} \frac{\log N\{P_\alpha\}}{1 - N\{P_\alpha\}^{-n}} \left(\log \frac{x}{N\{P_\alpha\}^n}\right)^2. \tag{1}$$

Наша цель — получить асимптотику суммы, стоящей справа в (1). Перечислим нужные нам свойства функции $Z(s)$. Они легко следуют из формулы следа Сельберга для Γ' [2]. $Z(s)$ — мероморфная функция в s-плоскости, удовлетворяющая функциональному уравнению

$$Z(s) = Z(1-s) \exp\Big\{A(D) \int_0^{s-{}^1/_2} v \operatorname{tg} \pi v\, dv -$$
$$- 2\pi \sum_{\beta=1}^{2} \sum_{k=1}^{m_\beta - 1} \frac{1}{m_\beta \sin(k\pi / m_\beta)} \int_0^{s-{}^1/_2} \frac{e^{-2\pi i v (k/m_\beta)}}{1 + e^{-2\pi i v}}\, dv\Big\} \times$$
$$\times \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2(s-{}^1/_2)} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)} \frac{\zeta(2s)}{\zeta(2-2s)} \frac{\Gamma(s + {}^1/_2)}{\Gamma({}^3/_2 - s)}; \tag{2}$$

здесь $m_1 = 2$, $m_2 = 3$; D — фундаментальная область группы Γ' с объемом $A(D)$. Нетривиальные нули функции $Z(s)$ — это числа $\rho_k = 1/2 + ir_k$ такие, что $\lambda_k = 1/4 + r_k^2$ принадлежат дискретному спектру Λ оператора $-y^2\Delta$. Все нули ρ_k лежат на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$, кроме конечного числа вещественных нулей в интервале $0 \leqslant s \leqslant 1$: $0 = a_{N+1} < a_N \leqslant \ldots \leqslant a_1 < a_0 = 1$. В точке $s = 1$ имеется нуль кратности 1. $Z(s)$ имеет также нули η_i в полосе $0 < \operatorname{Re} s < 1/2$ (это нетривиальные нули $\zeta(2s)$), а также (тривиальные) нули в целых точках $-n$ $(n \geqslant 1)$ с кратностями N_n и простые полюса в полуцелых точках $(-n - 1/2)$ $(n \geqslant 0)$ и (может быть) в точке $1/2$. С помощью (2) получаем

$$I(-\infty - iT, 2 - iT) + I(2 - iT, 2 + iT) + I(2 + iT, -\infty + iT) =$$
$$= x + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{x^{a_\nu}}{a_\nu^3} + \sum_{0<|\operatorname{Im}\rho|<T} \frac{x^\rho}{\rho^3} + \sum_{0<|\operatorname{Im}\eta|<T} \frac{x^\eta}{\eta^3} + \omega_{1/2} + \omega_0 +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} N_n \frac{x^{-n}}{(-n)^3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-n+1/2}}{(-n+1/2)^3}; \tag{3}$$

здесь ω_t — вычет $\frac{x^s}{s^3}\frac{Z'}{Z}(s)$ в точке t. Легко показать, что $|I(-\infty + iT, -1 + iT)| < C_1 T^{-2} x^{-1} \log^{-1} x$. Для оценки $I(-1 + iT, 2 + iT)$ используем некоторые свойства $Z(s)$ и $\zeta(s)$, а также асимптотику $\alpha(\lambda) / \lambda \sim A(D) / 4\pi$, где $\alpha(\lambda)$ — число элементов множества $\{\lambda_k \in \Lambda \mid \lambda_k < \lambda\}$ ([3]). После стандартных подсчетов имеем: $|I(-1 + iT, 2 + iT)| < C_2 x^2 T^{-1/2}$. Пусть $M = \operatorname{Max}\{\nu \mid a_\nu > 1/2\}$. В (3) устремим T к ∞. На основании сказанного справедлива

Теорема 1. *Имеет место асимптотическая формула*

$$1/2 \sum_{N\{P_\alpha\}^n < x} \log N\{P_\alpha\} \frac{[\log (x / N\{P_\alpha\}^n)]^2}{1 - N\{P_\alpha\}^{-n}} = x + \sum_{\nu=1}^{M} \frac{x^{a_\nu}}{a_\nu^3} + O(x^{1/2}). \tag{4}$$

Следствие. $x / \log^3 x \leqslant \sum_{N\{P_\alpha^n\} < x} 1 \leqslant x$.

3. Пусть K — класс сопряженных элементов в Γ', $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$ — представитель из K. Положим $s(K) = |\alpha + \beta|$, $d(K) =$ о.н.д. $(\beta, \gamma, \alpha - \delta)$. Очевидно, $s(K)$ и $d(K)$ зависят лишь от K. Пусть $H(n, d)$ — число классов K, для которых $s(K) = n$, $d(K) = d$. Тогда $H(n, d) = 0$, если $d^2 \neq (n^2 - 4)$. Введем обозначение: $(a, b, c) = ax^2 + 2bxy + cy^2$; $a, b, c \in \mathbf{Z}$. $(a, b, c) \sim (a_1, b_1, c_1)$, если существует $\tau \in \Gamma$ с условием ${}^t\tau \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \tau = \pm \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}$. Пусть T — класс форм; $(a, b, c) \in T$. Положим $D(T) = b^2 - ac$, $d(T) =$ о.н.д. $(a, 2b, c)$ (эти величины зависят лишь от T). Обозначим через $h(D, d)$ число классов T, для которых $D(T) = D$, $d(T) = d$. Для $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$ положим $f_\sigma = (2\gamma, \delta - \alpha, -2\beta)$. Отображение $\sigma \to f_\sigma$ определяет $1-1$ соответствие между множеством всех классов K в Γ' с $s(K) = n$, $d(K) = d$ и множеством всех классов T форм с $D(T) = n^2 - 4$, $d(T) = 2d$. Следовательно, $H(n, d) = h(n^2 - 4, 2d)$. Ниже $n > 2$, d — натуральные; $\varepsilon_n = (n + \sqrt{n^2 - 4}) / 2$, ε_n — единица поля $\mathbf{Q}(\sqrt{n^2 - 4})$. Пусть $\eta_n > 1$ — основная единица этого поля. Тогда $\varepsilon_n = \eta_n^t$, где $t > 0$, $t \in \mathbf{Z}$. Обозначим через $\nu(n, d)$ наибольший делитель ν числа t, для которого $(\eta_n^t - \eta_n^{-t}) \times (\eta_n^{t/\nu} - \eta_n^{-t/\nu}) \mid d$.

Лемма. *Пусть K — гиперболический класс в Γ'. Тогда*

$$\nu(K) = \nu(s(K), d(K)).$$

Используя теорему 1, а также результаты настоящего пункта, получаем:

Теорема 2. *Пусть* $\psi(n) = \sum_{d,\, d^2 \mid (n^2-4)} h(n^2-4, 2d) / \nu(n, d)$. *Тогда*

$$\sum_{2<n<\sqrt{x}+1/\sqrt{x}} \psi(n) \frac{\log N (\log x / N^2)^2}{1 - N^{-2}} = x + \sum_{\nu=1}^{M} x^{a_\nu} / a_\nu^3 + O(x^{1/2}),$$

где $N = {}^1/_2 (n + \sqrt{n^2 - 4})$.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
19 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Yamada, Osaka J. Math., 3, № 1, 29 (1966). [2] A. Selberg, Int. Coll. on Zeta Functions, Bombay, 1956, p. 47. [3] S. Tanaka, Osaka J. Math., 3, № 2, 205 (1966).