

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

М. И. ГОРДИН

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО БЫСТРОЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 13 VII 1970)

1. Если измеримое преобразование T вероятностного пространства $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ несингулярно (т. е. таково, что из $A \in \mathfrak{M}$, $\mu(A) = 0$ следует, что $\mu(T^{-1}(A)) = 0$), то равенство

$$\int_A V_\mu g(x) \mu(dx) = \int_{T^{-1}(A)} g(x) \mu(dx), \quad A \in \mathfrak{M},$$

определяет в $L_1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ линейный оператор V_μ .

Положим $\mathfrak{M}^n = T^{-n}(\mathfrak{M})$ ($n \geq 0$), и пусть E^n — оператор условного математического ожидания (у.м.о) относительно $\mathfrak{M}^n$.

Пусть, далее, $W(f, A)$ — колебание функции f на множестве A и пусть $|f|_W = W(f, X)$. Если S — такой линейный оператор в L_∞ , что $S(C) \subset C$ (C — подпространство постоянных), то через $|S|_W$ обозначается норма индуцированного S оператора S на пространстве L_∞/C , снабженном нормой $| \cdot |_W$.

2. Здесь предполагается, что T — эндоморфизм (т. е. сохраняющее меру преобразование) пространства $(X, \mathfrak{M}, P)$. Пусть задана некоторая σ -алгебра $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{M}$. Положим $\mathfrak{G}_k^l = \bigvee_{p=k}^l T^{-p}(\mathfrak{G})^*$, если $l \geq k \geq 0$, и пусть $\mathfrak{G}_k^l = \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N}$ — тривиальная σ -алгебра), если $k > l \geq 0$. Пусть далее $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{G}_0^{n-1}$ ($n \geq 0$), а E_n — оператор у.м.о. относительно $\mathfrak{M}_n$. Символы I и E обозначают единичный оператор и оператор интегрирования по мере P . Положим при $k \geq 0$

$$r(k) = \sup_{n \geq 0} |V_P^k (I - E_k) V_P^n E_{n+k}|_W.$$

Теорема 1. Пусть эндоморфизм T и σ -алгебра $\mathfrak{G}$ таковы, что

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (r(k))^{1/k} < 1, \quad r(0) < 1.$$

Если для функции $f \in L_\infty$ конечна при некотором β ($\beta > 1$, $\beta^{-1} > \lim_{k \rightarrow \infty} (r(k))^{1/k}$) полунорма

$$\rho_\beta(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k |V_P^k (I - E_k) f|_W,$$

то при $n \geq 0$ справедлива оценка

$$|V_P^n f - E f|_\infty \leq L l^{-\lambda n} \rho_\beta(f),$$

где $L > 0$ и $\lambda > 0$ зависят лишь от чисел $r(k)$ и β .

* Знаками $\bigvee$ и $\bigwedge$ обозначаются операции взятия наименьшей верхней грани и пересечения некоторого семейства σ -алгебр.

Следствие 1. (Равномерное сильное перемешивание.) Если $A \in \mathfrak{M}_n$, $B \in \mathfrak{M}^{k+n}$, то при $n \geq 0$

$$|P(AB) - P(A)P(B)| \leq L^k l^{-kn} P(B).$$

Следствие 2. Если $\bigvee_{k=0}^{\infty} T^{-k}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{M}$, то $\bigwedge_{k=0}^{\infty} T^{-k}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$ (т. е. T — точный эндоморфизм ⁽¹⁾).

Некоторая модификация теоремы 1 справедлива в случае, когда T — автоморфизм (т. е. обратимый эндоморфизм) пространства $(X, \mathfrak{M}, P)$ и заданы две последовательности σ -алгебр $\mathfrak{M}_n$ и $\mathfrak{M}^n$, причем $\mathfrak{M}_n \subset T^{-1}(\mathfrak{M}_n) = \mathfrak{M}_{n+1}$, а $\mathfrak{M}^n \supset T^{-1}(\mathfrak{M}^n) = \mathfrak{M}^{n+1}$.

3. Пусть T — измеримое преобразование вероятностного пространства $(X, \mathfrak{M}, \mu)$. Сформулируем условия, фигурирующие в приводимых ниже результатах.

I. Предположим, что задано разбиение X на конечное или счетное число множеств $A_i \in \mathfrak{M}$ положительной меры, находящихся во взаимно однозначном соответствии с элементами i некоторого множества I , причем T несингулярно и взаимно однозначно отображает каждое множество A_i на $T(A_i)$ и, кроме того, $T(A_i)$ измеримо, а обратное отображение $f_i: T(A_i) \rightarrow A_i$ измеримо и несингулярно.

Множество положительной меры вида $\bigcap_{k=1}^{n-1} T^{-k}(A_{i_k})$ (n фиксировано) называется квазинтервалом ранга n , а порожденная ими σ -алгебра обозначается через $\mathfrak{M}_n$. Если положить $\mathfrak{C} = \mathfrak{M}_1$, то ясно, что $\mathfrak{M}_n = \bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}(\mathfrak{C})$.

Пусть $i^n = (i_1, \dots, i_n) \in I^n$. Положим

$$A_{i^n} = \bigcap_{k=1}^{n-1} T^{-k}(A_{i_k}), \quad f_{i^n}(x) = f_{i_1}(f_{i_2} \dots (f_{i_n}(x)) \dots).$$

Обозначим через J_{i^n} производную относительно μ меры μ_{i^n} , определенной равенством $\mu_{i^n}(A) = \mu(A_{i^n} \cap T^{-n}(A))$, $A \in \mathfrak{M}$. Мы будем называть квазинтервал A ранга n невырожденным, если $\mu(T^n(A)) = 1$, и вырожденным, если $\mu(T^n(A)) < 1$. Совокупность всех квазинтервалов ранга n обозначим через (n) , а всех невырожденных квазинтервалов ранга n — через $(n)_0$.

II. Существует такое $q > 0$, что при всех $n \geq 0$

$$\sum_{(n)_0} \mu(A_{i^n}) \geq q.$$

Если A_{i^n} — квазинтервал ранга n , то положим

$$J_{i^n} = \text{ess sup}_{x \in T^n(A_{i^n})} J_{i^n}(x), \quad \underline{J}_{i^n} = \text{ess inf}_{x \in T^n(A_{i^n})} J_{i^n}(x).$$

III. Существует такая постоянная C , что для всех $i^n \in I^n$ и $n \geq 0$

$$J_{i^n} \leq C \underline{J}_{i^n}.$$

IV. Существует такая постоянная L , что для всех $n \geq 0$

$$\sum_{(n)} \underline{J}_{i^n} \leq L.$$

Пусть A_{i^n} — квазинтервал ранга n . Символом (k, i^n) (соответственно $(k, \underline{i}^n)$) обозначается совокупность всех квазинтервалов A_{i^k} ранга k , для которых $\mu(A_{i^k} | T^n(A_{i^n})) = 0$ (соответственно $\mu(A_{i^k} | T^n(A_{i^n})) \mu(A_{i^k} \cap T^n(A_{i^n})) = 0$).

Положим

$$d_k = \sup_{n \geq 0} \sum_{(n)} \bar{J}_{i^n} \sum_{(k, i^n)} \bar{J}_{i^k}; \quad l_k = \sup_{n \geq 0} \sum_{(n)} \sum_{(k, i^n)} \bar{J}_{i^k} W(J_{i^n}, A_{i^k});$$

$$d'_k = \sup_{n \geq 0} \sup_{(n)} \sum_{(k, i^n)} \bar{J}_{i^k}; \quad l'_k = \sup_{n \geq 0} \sup_{(n)} \sum_{(k, i^n)} \bar{J}_{i^k} W(J_{i^n}, A_{i^k}) (J_{i^n})^{-1}.$$

$$\text{V. } \lim_{k \rightarrow \infty} (d_k)^{1/k} < 1. \quad \text{V'. } \lim_{k \rightarrow \infty} (d'_k)^{1/k} < 1.$$

$$\text{VI. } \lim_{k \rightarrow \infty} (l_k)^{1/k} < 1. \quad \text{VI'. } \lim_{k \rightarrow \infty} (l'_k)^{1/k} < 1.$$

VII. При некотором $r > 0$

$$\inf_{n \geq 0} \inf_{(n)} \mu(T^n(A_{i^n})) \geq r.$$

Теорема 2. Пусть преобразование T и некоторое разбиение, порождающее σ -алгебру $\mathfrak{G}$, удовлетворяют условиям I—VI. Тогда справедливо следующее:

1. Существует в $L_1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{(k)} F_{i^k} = p,$$

причем $0 < C_1 \leq p \leq C_2 < \infty$, и мера P с плотностью p относительно μ — инвариантная мера преобразования T .

2. Эндоморфизм T и σ -алгебра $\mathfrak{G}$ удовлетворяют условиям теоремы 1. При этом $r(k) \leq M(d_k + l_k)$.

3. Пусть $g \in L_\infty$. Положим

$$\sigma_\beta(g) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \sum_{(k)} \bar{J}_{i^k} W(g, A_{i^k}).$$

Если $1 < \beta^{-1} < \max(\lim_{k \rightarrow \infty} d_k^{1/k}, \lim_{k \rightarrow \infty} l_k^{1/k})$ и $\sigma_\beta(g) < \infty$, то

$$\left| V_p^n g - \int_X g(x) P(dx) \right|_\infty \leq A l^{-\lambda n} \sigma_\beta(g),$$

причем $A > 0$ и $\lambda > 0$ — постоянные, зависящие лишь от T , $\mathfrak{G}$ и β .

Теорема 3. Пусть преобразование T пространства $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ и разбиение пространства X удовлетворяют условиям I—III, V', VI' и VII. Тогда выполнены условия теоремы 2 и, кроме того, если $g \in L_1(X, \mathfrak{M}, P)$ измерима относительно $\mathfrak{M}_h$, то при $n \geq 0$

$$\left| E^{n+k} g - \int_X g(x) P(dx) \right|_\infty \leq B l^{-\lambda n} |f|_1,$$

причем $B > 0$ и $\lambda > 0$ — постоянные, зависящие лишь от T и $\mathfrak{G}$.

Следствие 2. (Обобщенная теорема Кузьмина (ср. (2)).) В условиях теоремы 2

$$\left| \sum_{(n)} J_{i^n} g(f_{i^n}) - p \int_X g(x) \mu(dx) \right|_\infty \leq l^{-\lambda n} (A_1 |g|_\infty + A_2 \sigma_\beta(g)).$$

Следствие 3. (Плавное перемешивание.) Если выполнены условия теоремы 3 и $A \in \mathfrak{M}_h$, $B \in \mathfrak{M}^{h+n}$, то при $n \geq 0$

$$|P(AB) - P(A)P(B)| \leq C l^{-\lambda n} P(A)P(B)$$

Положим $\alpha_k = \sup_{i \in I} \sup_{(k)} W(\ln J_i, A_{i^k} \cap T(A_i)).$

Теорема 4. Пусть выполнено условие I. Если $\alpha_0 < \infty$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k)^{1/k} < 1$, то выполнено условие III. Если, кроме того, имеет место условие IV, то выполнено условие VI'.

4. Здесь мы укажем применения теорем 2 и 3.

а. θ -разложения. Пусть $\theta > 1$. Положим $Tx = \theta x - [\theta x]$, $x \in [0, 1]$. Если μ — мера Лебега на $[0, 1]$, а $\mathcal{G}$ — σ -алгебра, порожденная функцией $[\theta x]$, то применима теорема 2.

б. Преобразование Якоби — Перрона. Пусть X — s -мерный единичный куб Q^s с мерой Лебега μ . Положим

$$T(x_1, \dots, x_s) = (x_2 x_1^{-1} - [x_2 x_1^{-1}], \dots, x_s x_1^{-1} - [x_s x_1^{-1}], x_1^{-1} - [x_1^{-1}]).$$

Если $\mathcal{G}$ — σ -алгебра, порожденная вектор-функцией $([x_2 x_1^{-1}], \dots, [x_s x_1^{-1}], [x_1^{-1}])$, то, используя теорему 4, можно проверить выполнение условий теоремы 3. Кроме того, можно показать, что плотность p инвариантной меры непрерывна в областях, полученных при разбиении Q^s всеми гиперплоскостями вида $x_r = x_{r'}$ ($1 \leq r, r' \leq s$) и имеет разрывы на границах этих областей.

Отметим, что те же вопросы, связанные с преобразованием Якоби — Перрона, изучались в (2, 4). Однако содержащиеся там оценки таковы, что, например, остается открытым вопрос о применимости центральной предельной теоремы к измеримым относительно $\mathcal{G}$ функциям из L_2 . В то же время в доказательствах этих результатов имеются серьезные дефекты, а сами теоремы имеют условный характер: предполагается, что p имеет ограниченные частные производные во всем Q^s , что не так, поскольку у p имеются разрывы.

С помощью теорем 2—4 можно также усилить теоремы 1—3 из (2), но сейчас мы не будем на этом останавливаться.

Автор благодарит Ю. В. Линника, указавшего на задачи, связанные с преобразованием Якоби — Перрона.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
электроизмерительных приборов
Ленинград

Поступило
3 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Рохлин, Изв. АН СССР, сер. матем., 25, 499 (1961). ² А. Я. Хинчин, Ценные дроби, 1949. ³ F. Schweiger, J. Reine u. Angew. Math., 232, 35 (1968). ⁴ M. S. Waterman, Some Ergodic Properties of Multi-dimensional F-expansions, Mich. Univ., 1969. Preprint. ⁵ М. И. Гордин, ДАН, 182, 1004 (1968).