

В. А. ДАНИЛОВ

О ГЛАДКОСТИ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ
В ЗАМКНУТЫХ ОБЛАСТЯХ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 29 VI 1970)

В этой работе изучаются свойства решений уравнения Бельтрами $f_z - \mu(z)f_{\bar{z}} = 0$, представляющих собой квазиконформные отображения с комплексной характеристикой $\mu(z)$, которая является функцией определенной гладкости в некоторой замкнутой области $\bar{G}$.

Известно (см. (1, 2)), что если характеристика $\mu(z)$ принадлежит классу C_α^m , $0 < \alpha < 1$, в некоторой окрестности точки z_0 , то решение f будет функцией класса C_α^{m+1} в окрестности этой точки.

Нашей целью является установление свойств квазиконформных отображений в замкнутых областях, когда $\mu(z) \in C_\alpha^m(\bar{G})$ или некоторому более общему пространству, если $\mu(z)$ и ее производные терпят разрыв типа скачка на конечном числе гладких замкнутых кривых, и получение возможной равномерной оценки искажения $f(z) - z$ в соответствующих нормах.

Пусть $G_1, \dots, G_n$ — ограниченные непересекающиеся области класса C_α^{m+1} . Положим $U = \bigcup_{i=1}^n G_i$. Обозначим через $\tilde{C}_\alpha^m(U)$ комплексное банахово пространство функций f , заданных на U , таких, что сужения $f_i = f|_{G_i} \in C_\alpha^m(\bar{G}_i)$, $i = 1, \dots, n$, с нормой

$$\|f\|_{\tilde{C}_\alpha^m(U)} = \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{C_\alpha^m(\bar{G}_i)}.$$

Теорема 1. Пусть в круге $|z| < 1$ дано конечное число попарно непересекающихся замкнутых жордановых кривых класса C_α^{m+1} , которые разбивают этот круг на некоторые подобласти $G_1, \dots, G_n$. Предположим, что $\mu(z) \in \tilde{C}_\alpha^m(U)$, где $U = \bigcup_{i=1}^n G_i$. Тогда существует такое число ε_0 , $0 < \varepsilon_0 < 1$, что если $\|\mu\|_{\tilde{C}_\alpha^m(\bar{U})} < \varepsilon_0$, то квазиконформное отображение $w = f(z)$ круга $\bar{U}$ на себя с характеристикой $\mu(z)$ и нормировкой $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ принадлежит пространству $\tilde{C}_\alpha^m(U)$ и

$$\|f - z\|_{\tilde{C}_\alpha^{m+1}(U)} \leq M \|\mu\|_{\tilde{C}_\alpha^m(U)},$$

где постоянная M зависит только от ε_0 , m и выделенных областей $G_1, \dots, G_n$.

Следствие. Пусть U — круг $|z| < 1$ и $\mu(z) \in C_\alpha^m(U)$. Тогда существует такое ε_0 , что если $\|\mu\|_{\tilde{C}_\alpha^m(\bar{U})} < \varepsilon_0$, то квазиконформное отображение $w = f(z)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, круга U на себя с характеристикой $\mu(z)$ принадлежит пространству $\tilde{C}_\alpha^{m+1}(\bar{U})$ и

$$\|f - z\|_{\tilde{C}_\alpha^{m+1}(\bar{U})} \leq M_1 \|\mu\|_{\tilde{C}_\alpha^m(\bar{U})}.$$

Теорема 2. Пусть G и G' — области класса C_α^{m+1} , и пусть $\mu(z) \in C_\alpha^m(\bar{G})$. Тогда квазиконформное отображение $w = f(z)$ области G на G' с характеристикой $\mu(z)$ принадлежит пространству $\tilde{C}_\alpha^m(\bar{G})$.

Доказательство теорем 1 и 2 опирается на следующие леммы.

Лемма 1. Пусть G — ограниченная область класса C_{α}^m , $0 \leq \alpha \leq 1$. Для любой функции $f \in C_{\alpha}^m(G)$ существует такое продолжение f^* на некоторый круг $U_R = \{|z| < R\}$, содержащий $\bar{G}$, что $f^* \in C_{\alpha}^m(\bar{U}_R)$ и

$$\|f^*\|_{C_{\alpha}^m(\bar{U}_R)} \leq L \|f\|_{C_{\alpha}^m(G)}.$$

Постоянная L зависит только от G и m , а число R не зависит от f .

В пространстве $C_{\alpha}^m(U)$ рассмотрим интегральные операторы

$$Tf = -\frac{1}{\pi} \iint_G f(\xi) \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\bar{\xi}} \right) d\xi d\eta; \quad (1)$$

$$\Pi f = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi d\eta \quad (2)$$

(интеграл (2) понимается в смысле главного значения).

Лемма 2. Операторы T и Π , определяемые формулами (1) и (2), являются линейными и ограниченными в пространстве $C_{\alpha}^m(U)$ и переводят $C_{\alpha}^m(U)$ в пространства $C_{\alpha+1}^{m+1}(U)$ и $C_{\alpha}^m(U)$ соответственно.

Доказательство этой леммы опирается на лемму 1 и теорему 1.38 из (1).

Лемма 3. Пусть D и D' — односвязные области, границы которых лежат соответственно в кольцах $\{R - \delta \leq |z| \leq R + \delta\}$ и $\{R - \delta' \leq |z| \leq R + \delta'\}$, и пусть z_0 — фиксированная точка, $0 < |z_0| < R$. Тогда для любого $r < R$ существует δ_0 , $0 < \delta_0 < R - r$, такое, что при $\delta, \delta' < \delta_0$ для конформного отображения $w = \varphi(z)$ области D на область D' , удовлетворяющего условиям $\varphi(0) = 0$ и $|\varphi(z_0) - z_0| \leq \delta + \delta'$, имеет место оценка $\|\varphi - z\|_{C_1^m(\bar{U}_r)} \leq K(\delta + \delta')$, где $U_r = \{|z| < r\}$, а постоянная

K зависит только от m и r .

Доказательство опирается на одну лемму Варшавского (3).

Изложим кратко схему доказательства теоремы 1. Отображение f продолжается по симметрии на всю плоскость. Это продолжение $\tilde{f}$ рассматривается в некотором круге $|z| < \rho$, $\rho > 1$, который при малом ε_0 отображается на область, близкую к кругу $|z| < \rho$ (см. (4)). Комплексная характеристика $\mu^*(z)$ отображения $w = \tilde{f}(z)$ будет равна $\mu(z)$ при $|z| < 1$ и равна $\bar{\mu}(1/\bar{z})z^2/\bar{z}^2$ при $1 < |z| < \rho$.

Как доказано в (4), гомеоморфное решение уравнения Бельтрами $f_z^* - \mu^*(z)f_z^* = 0$ имеет вид $f^* = z + Tg$, где $g(z)$ — решение сингулярного интегрального уравнения $g - \mu^* \Pi g = \mu^*$. Используя лемму 2, при достаточно малом ε_0 получим, что $f^* \in C_{\alpha+1}^{m+1}(U')$, где $U' = U \cup \{1 < |z| < \rho\}$ и $\|f^* - z\|_{C_{\alpha+1}^{m+1}(U')} \leq M_2 \|\mu\|_{C_{\alpha}^m(U)}$. Отсюда с помощью леммы 3 получим утверждение теоремы 1.

Теорема 2 вытекает из леммы 1 и известных результатов о гладкости конформных отображений в замкнутых областях класса C_{α}^m (см. (5)).

В заключение автор благодарит Н. Н. Белинского и С. Л. Крушкаля за советы и замечания.

Примечание при корректуре. Как стало известно автору после того, как работа была сдана в печать, утверждение теоремы 2 получено В. Н. Монаховым.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
13 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. ² Б. В. Шабат, Матем. сборн., 17 (59), 193 (1945). ³ S. E. Warschawsky, Trans. Am. Math. Soc., 69, 335 (1950). ⁴ П. П. Белинский, Сибирск. матем. журн., 1, № 3, 303 (1960). ⁵ S. Warschawski, Math. Zs., 35, № 3—4, 321 (1932).