

УДК 513.015 + 513.737

МАТЕМАТИКА

Л. З. КРУГЛЯКОВ

К ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ СЕМЕЙСТВ МНОГОМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 24 VI 1970)

Теория a -параметрических семейств (a -семейств) d -мерных плоскостей L в однородных многомерных пространствах является непосредственным обобщением линейчатой геометрии трехмерного пространства ⁽¹⁾ и находит широкое приложение при изучении многомерной поверхности ⁽²⁾.

В предлагаемой заметке получены условия, при которых невырождающееся a -семейство $(L)_a$ d -плоскостей L в N -мерном проективном пространстве P_N обладает фокальными порядка (класса) h (ср. ⁽¹⁾) неголономными подмногообразиями Ψ_b (в смысле ⁽³⁾). Вводятся понятия k -псевдофокального и дуально k -псевдофокального семейств, которые дают возможность развить фокальную классификацию ⁽¹⁾ при обычных предположениях о дифференцируемости всех фигурирующих в рассмотрении функций.

1. Отнесем a -семейство $(L)_a$ d -плоскостей $L \equiv (A_0 \dots A_d)$ в P_N ($a \leq (d+1)(N-d)$) к подвижному реперу $\{A_\alpha\}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, \dots, N$), деривационные формулы которого имеют вид $dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta$, где ω_α^β — формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства. Дифференциальные уравнения семейства $(L)_a$, отнесенного к базису ω^* ($\kappa = 1, \dots, a$) главных форм ω_i^q ($i = 0, 1, \dots, d$; $q = d+1, \dots, N$) имеют вид $\omega_i^q = a_{i\kappa}^q \omega^*$. Касательное подпространство T_n ⁽⁴⁾ плоскости L имеет размерность $n = d + r \leq N$, где r — ранг матрицы $\|a_{i\kappa}^q\|$ (q — индекс строк). Если $n < N$, т. е. семейство $(L)_a$ является фокальным класса $h_1^a = N - n - 1$ ⁽¹⁾, то, помещая вершины A_p ($p = d+1, \dots, n$) в подпространство T_n , получим $a_{i\kappa}^{q'} = 0$ при $q' > n$.

Пусть уравнения $\omega^v = \lambda_\tau^v \omega^\tau$ ($\tau = 1, \dots, b$; $v = b+1, \dots, a$) определяют неголономное подмногообразие Ψ_b (в смысле ⁽³⁾) семейства $(L)_a$. Касательное подпространство T^b плоскости L подмногообразия Ψ_b есть линейная оболочка всех касательных подпространств этой плоскости, рассматриваемой как элемент всех подмногообразий Ψ_i ($L \subset \Psi_i \subset \Psi_b$). Оно имеет размерность $\dim T^b = d + r_b$, где r_b — ранг матрицы $\|a_{i\tau}^p + \lambda_\tau^v a_{i\kappa}^p\|$, имеющей $b(d+1)$ столбцов и $N - d - h_1^a - 1$ строк.

Подмногообразие Ψ_b назовем фокальным порядка h , если пересечение плоскости L и всех близких плоскостей $L + dL$ при смещении по любому подмногообразию $\Psi_i \subset \Psi_b$ имеет размерность h . Само пересечение назовем h -фокусом подмногообразия Ψ_b (ср. ⁽⁴⁾). Семейство $(L)_a$ является фокальным порядка h^a ^(1, 4), если ранг матрицы $\|a_{i\kappa}^p\|$ (i — индекс столбцов) равен $d - h^a$. Подмногообразие Ψ_b назовем фокальным класса h_1 , если касательное подпространство T^b этого подмногообразия имеет размерность $N - h_1 - 1$. Если подмногообразие Ψ_b голономно, т. е. расслаивается на ∞^{a-b} b -семейств $(L)_b$, то последние будут фокальными (в смысле ⁽¹⁾) порядка h (класса h_1). Нефокальное семейство будем считать семейством порядка (класса) минус единица.

Теорема 1. a -семейство d -плоскостей в P_N класса h_1^a обладает неголономными фокальными подмногообразиями Ψ_b класса $h_1 > h_1^a$ тогда и

только тогда, когда $\mu \equiv b(d+1) - N + d + h_1 + 1 \geq 0$, $b(a-b) \geq \mu(h_1 - h_1^a)$.

Теорема 2. a -семейство d -плоскостей в P_N порядка h^a обладает неголономными фокальными подмногообразиями Ψ_b порядка $h > h^a$ тогда и только тогда, когда $\eta \equiv b(N-d) - d + h \geq 0$, $b(a-b) \geq \eta(h - h^a)$.

Если в теореме 1 (2) $\mu = 0$ ($\eta = 0$), то все подмногообразия Ψ_b являются фокальными класса h_1 (порядка h). Если же равенство имеет место во втором условии, то имеется конечное число подмногообразий Ψ_b фокальных класса h_1 (порядка h).

2. Как точечное многообразие семейство $(L)_a$ является $(d+a)$ -поверхностью S_{d+a} . Пусть L_k — k -мерная плоскость, принадлежащая плоскости L ($k=0, 1, \dots, d-1$). Рассмотрим случай, когда $\rho_1 = n - d - a(k+1) \geq 1$. Касательным подпространством T^k плоскости $L_k \subset L$ назовем линейную оболочку касательных $(d+a)$ -плоскостей к поверхности S_{d+a} во всех точках плоскости L_k . В общем случае $\dim T^k = d + a(k+1)$.

Будем искать такие подмногообразия Ψ_b , для которых касательные подпространства T^b имеют размерность $\dim T^b = \dim T^k$, т. е. являются фокальными класса $h_1 = h_1^a + \rho_1$. Из теоремы 1 следует, что семейство $(L)_a$ обладает такими подмногообразиями (будем обозначать их Ψ_b^*) только при $\mu \equiv b(d+1) - a(k+1) \geq 0$, $b(a-b) \geq \mu \rho_1$.

Плоскость L_k назовем k -псевдофокусом подмногообразия Ψ_b^* , если касательное подпространство T^b совпадает с подпространством T^k .

Теорема 3. Каждая плоскость $L_k \subset L$ является k -псевдофокусом конечного числа подмногообразий Ψ_b^* семейства $(L)_a$ в P_N тогда и только тогда, когда $k < d$, $1 \leq \rho_1 \leq a/(d+1)$, $b = a - \rho_1(d-k)$.

Соответствие $L_k \rightarrow \Psi_b^*$ назовем в этом случае Π_b^k -соответствием, а семейство $(L)_a$, обладающее Π_b^k -соответствием, назовем k -псевдофокальным семейством класса ρ_1 . Для k -псевдофокального семейства $a > d$. При $\rho_1 > 1$ Π_b^k -соответствие имеет место не для каждого подмногообразия Ψ_b^* . Только для k -псевдофокального семейства класса $\rho_1 = 1$ каждое подмногообразие Ψ_b^* имеет единственный k -псевдофокус. При $k=0$ получаем псевдофокальное a -семейство ⁽⁶⁾ с соответствием между точками плоскости L и подмногообразиями $\Psi_{a-\rho_1 d}^*$, частный случай которого ($d=1$, $a=2$, $N=4$) рассмотрен в ⁽⁵⁾.

3. По принципу двойственности в P_N подмногообразию Ψ_b^* семейства $(L)_a$ соответствует подмногообразие $\bar{\Psi}_b^*$ семейства $(\bar{L})_a$ d -плоскостей $\bar{L}$ ($d = a(k+1) + \rho + h^a$) фокальное порядка $h = h^a + \rho$. Плоскость $T_{N-k-1} \supset \bar{L}$ назовем псевдофокальной $(N-k-1)$ -плоскостью подмногообразия $\bar{\Psi}_b^*$ семейства $(\bar{L})_a$, если пересечение плоскости $\bar{L}$ и характеристической плоскости T_{N-k-1} при любом смещении по семейству $(\bar{L})_a$ совпадает с $(h^a + \rho)$ -фокусом подмногообразия $\bar{\Psi}_b^*$. Теореме 3 соответствует

Теорема 4. Каждая плоскость $T_{N-k-1} \supset \bar{L}$ является псевдофокальной $(N-k-1)$ -плоскостью конечного числа подмногообразий $\bar{\Psi}_b^*$ семейства $(\bar{L})_a$ в P_N тогда и только тогда, когда $d+k+1 < N \leq a/\rho + d$, $b = a - \rho(N-d-k-1)$, $\rho \equiv d - a(k+1) - h^a \geq 1$.

Соответствие $T_{N-k-1} \rightarrow \bar{\Psi}_b^*$ назовем в этом случае $D\Pi_b^k$ -соответствием, а семейство, обладающее $D\Pi_b^k$ -соответствием, назовем дуально k -псевдофокальным семейством порядка ρ . Для дуально k -псевдофокального семейства $d > a(k+1) + h^a$. Только для дуально k -псевдофокального семейства порядка один каждое подмногообразие $\bar{\Psi}_b^*$ имеет единственную псевдофокальную $(N-k-1)$ -плоскость.

4. Введенные в пунктах 2 и 3 понятия для a -семейств d -плоскостей в P_N переносятся на неголономные подмногообразия Ψ_m ($2 \leq m < a$). Подмногообразие Ψ_m назовем k -псевдофокальным класса ρ_1 , если оно обладает Π_b^k -соответствием, причем $b = m - \rho_1(d-k)$. Для k -псевдофокального подмногообразия Ψ_m класса ρ_1 размерность касательного подпространства T^m равна $d + m(k+1) + \rho_1$, где $1 \leq \rho_1 \leq m/(d+1)$. Подмно-

гообразии Ψ_m семейства d -плоскостей $(L)_a$ назовем дуально k -псевдофокальным порядка ρ , если оно обладает $D\Pi_b^k$ -соответствием. Для дуально k -псевдофокального порядка ρ подмногообразия Ψ_m (фокального порядка h^m) выполняются условия $d + k + 1 < N \leq m / \rho + d$, $\rho \equiv d - m(k + 1) - h^m \geq 1$. С помощью соотношений, приведенных в теоремах 1 и 2, получают следующие результаты.

Теорема 5. *а-семейство d -плоскостей в P_N класса h_1^a обладает неголомными k -псевдофокальными подмногообразиями Ψ_m класса $\rho_1 \geq 1$ тогда и только тогда, когда $k < d$, $\rho_1(d + 1) \leq m$, $m(a - m) \geq [m(d - k) - \rho_1][N - d - \rho_1 - h_1^a - 1 - m(k + 1)] \geq 0$.*

Теорема 6. *а-семейство d -плоскостей в P_N порядка h^a обладает неголомными дуально k -псевдофокальными подмногообразиями Ψ_m порядка $\rho = d - m(k + 1) - h^a \geq 1$ тогда и только тогда, когда $N - k - 1 > d$, $\rho(N - d) \leq m$, $m(a - m) \geq [m(N - d - k - 1) - \rho][d - m(k + 1) - \rho - h^a] \geq 0$.*

Если для Ψ_m в последнем условии теоремы 5(6) имеет место равенство, то имеется конечное число подмногообразий Ψ_m k -псевдофокальных класса ρ_1 (дуально k -псевдофокальных порядка ρ).

Эти результаты дают возможность развить фокальную классификацию семейств d -плоскостей $(L)_a$. Именно, семейства $(L)_a$ в P_N можно классифицировать по числу k -псевдофокальных (дуально k -псевдофокальных) подмногообразий Ψ_m минимального класса ρ_1 (порядка ρ) и минимального k . Семейства $(L)_a$, обладающие k -псевдофокальными подмногообразиями Ψ_m класса $\rho_1 \geq 1$, назовем семействами типа $\Pi_b^k(L)_a^m$, где $b = m - \rho_1(d - k)$. Семейства $(L)_a$, обладающие дуально k -псевдофокальными подмногообразиями Ψ_m порядка $\rho \geq 1$, назовем семействами типа $D\Pi_b^k(L)_a^m$, где $b = m - \rho(N - d - k - 1)$. Для k -псевдофокальных (дуально k -псевдофокальных) семейств следует считать $m = a$.

Сибирский автодорожный институт
им. В. В. Куйбышева
Омск

Поступило
10 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Р. М. Гейдельман, Итоги науки, Алгебра, Топология, Геометрия, 1965, М., 1967, стр. 323. ² Е. Т. Ивлеев, ДАН, 180, № 6, 1283 (1968). ³ Р. Н. Щербаков, Геометр. сборн., в. 6 (тр. Томск. ун-в., 191, 1967, стр. 179). ⁴ С. Е. Карапетян, Изв. АН АрмССР, 16, № 3, 5 (1963). ⁵ С. Е. Карапетян, Изв. АН АрмССР, 15, № 2, 3 (1962). ⁶ Л. З. Кругляков, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 10 (1969).