Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (114), 2019

УДК 512.548

О полиадических группоидах специального вида

А.М. Гальмак[1], М.В. Селькин[2]

Авторы продолжают изучение перестановочности элементов в полиадических группоидах с полиадической операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая определяется на декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ и n-арной операции η. Основным результатом статьи является теорема, в которой сформулированы новые достаточные условия неабелевости полиадического группоида $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. Приведены следствия из этой теоремы.

Ключевые слова: n-арный группоид, n-арная полугруппа, абелевость.

In the article the authors carry on their studies of permutability of the elements in polyadic groupoids with polyadic operation $\eta_{s,\sigma,k}$ which is determined by the Cartesian power of A^k n-ary groupoid $< A, \eta >$ using the substitution $\sigma \in \mathbf{S}_k$ and n-ary operation η.The main result of the article is the theorem in which new sufficient conditions of non-abelianism of polyadic groupoid $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ are formulated and the corollaries of the theorem are given.

Keywords: n-ary groupoid, n-ary semigroup, abelian property (commutativity).

Введение. В статье под полиадической операцией специального вида понимается l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$, определение которой приведено ниже. Соответствующий l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ называется полиадическим группоидом специального вида.

Определение [1]. Пусть $< A, \eta >$ – n-арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1)+1$, $k \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_k$. Определим на A^k вначале n-арную операцию

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n) = \eta_{1,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})) =$$
$$= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \ldots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(k)})),$$

а затем l-арную операцию

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = \eta_{s,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{l1}, \ldots, x_{lk})) =$$
$$= \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{n-1}\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_n \ldots \mathbf{x}_{2(n-1)}\eta_{1,\sigma,k}(\ldots$$
$$\ldots \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)}\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{s(n-1)+1})) \ldots))).$$

При $s = 1$ n-арная операция $\eta_{1,\sigma,k}$ совпадает с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$.

К числу полиадических операций специального вида относятся две полиадические операции Э. Поста [2], соответствующие случаю

$$n = 2,\ s = m,\ k = m-1,\ l = m,\ \sigma = (12 \ldots m-1).$$

Одну из своих операций Э. Пост определил на декартовой степени симметрической группы**,** вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел.

Обе операции Э. Поста являются частными случаями l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая была определена в [3] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ на k-ой декартовой степени A^k группоида A. В свою очередь, операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, является частным случаем ($n = 2$) операции $\eta_{s,\sigma,k}$, а именно: $[\ ]_{s+1,\sigma,k} = \eta_{s,\sigma,k}$. Изучению операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ посвящена книга [4]. В этой книге, в частности, подробно изучена n-арная операция $\eta_{1,(12\ldots n-1),n-1}$, для обозначения которой использовался символ $\tilde{\eta}$.

В данной статье продолжается изучение перестановочности элементов в полиадическом группоиде $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. Этой тематике посвящены статьи [5], [6].

1. Используемые результаты. Явный вид l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ описывает следующая

Теорема 1.1 [1]. *Если*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ik}),\ i = 1, 2, \ldots, l,$$
$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = (y_1, \ldots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ j-ая компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots\ x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)}\eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \ldots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)}\,\eta(\ldots$$
$$\ldots\ \eta\,(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)})\ \ldots\ ))).$$

Если n-арная операция η ассоциативна, то последнее равенство может быть переписано следующим образом

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots\ x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots\ x_{l\sigma^{l-1}(j)}).$$

Согласно следующей теореме, тождественность подстановки σ^{l-1} влечёт за собой перенос ассоциативности с n-арной операции η на l-арную операцию $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$.

Теорема 1.2 [1]. Если n-арная операция η – ассоциативна, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ ассоциативна.

Таким образом, если $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ – l-арная полугруппа.

Напомним, что n-арный группоид $< A, [\ ] >$ называют *абелевым*, если в нём для любой подстановки σ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ выполняется тождество

$$[a_1a_2 \ldots a_n] = [a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(n)}].$$

l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ может быть как абелевым, так и неабелевым. Некоторые условия неабелевости l-арного группоида $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ сформулированы в следующих двух теоремах.

Теорема 1.3 [7]. *Пусть подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *не является тождественной,* n*-арный группоид* $< A, \eta >$ *обладает такими элементами* $a, e_1, \ldots, e_{n-1}$, *что* $a \neq e_1$,

$$\eta(ae_1 \ldots e_{n-1}) = a, \qquad (1.1)$$
$$\eta(e_1e_1 \ldots e_{n-1}) = e_1, \qquad (1.2)$$
$$\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1}) = e_{n-1}. \qquad (1.3)$$

Тогда l*-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ *не является абелевым.*

Теорема 1.4 [7]. *Пусть подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *не является тождественной,* n*-арный группоид* $< A, \eta >$, *где* $n \geq 3$, *обладает такими элементами* $e_1, \ldots, e_{n-1}$, *что* $e_1 \neq e_{n-1}$, *и верны равенства* (1.2), (1.3). *Тогда* l*-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ *не является абелевым.*

2. Основной результат. В следующей теореме равенство (1.3) из теоремы 1.3 заменяется более общим равенством. При этом для сохранения неабелевости l-арного группоида $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ пришлось наложить дополнительные ограничения на l-арную операцию $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$, делающие её частично ассоциативной.

Теорема 2.1. *Пусть подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *не является тождественной, в* n*-арном группоиде* $< A, \eta >$ *существуют элементы* $a, e_1, \ldots, e_{n-1} \in A$ *такие, что* $a \neq e_1$, *и верны равенства* (1.1), (1.2), *а также для некоторого* $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ *верны равенства*

$$\eta(e_i \ldots e_{n-1}e_1 \ldots e_i) = e_i, \qquad (2.1)$$
$$\eta(ae_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1})) = \eta(ae_1 \ldots e_{i-1}\eta(e_i \ldots e_{n-1}e_1 \ldots e_i)e_{i+1} \ldots e_{n-1}), \qquad (2.2)$$
$$\eta(e_1e_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1})) = \eta(e_1e_1 \ldots e_{i-1}\eta(e_i \ldots e_{n-1}e_1 \ldots e_i)e_{i+1} \ldots e_{n-1}), \qquad (2.3)$$
$$\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1})) = \eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{i-1}\eta(e_i \ldots e_{n-1}e_1 \ldots e_i)e_{i+1} \ldots e_{n-1}). \qquad (2.4)$$

Тогда l*-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ *не является абелевым.*

Доказательство. Так как σ не является тождественной подстановкой, то существует $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ с условием $\sigma(j) \neq j$. Положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = e_1, \ldots, a_{j-1} = e_1, a_j = a, a_{j+1} = e_1, \ldots, a_k = e_1), \qquad (2.5)$$
$$\mathbf{e}_1 = (\underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{k}),\ \mathbf{e}_2 = (\underbrace{e_2, \ldots, e_2}_{k}),\ \ldots,\ \mathbf{e}_{n-1} = (\underbrace{e_{n-1}, \ldots, e_{n-1}}_{k}),$$
$$\eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}\,\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}\ \ldots\ \mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}}_{s}) = (y_1, y_2, \ldots, y_k),$$
$$\eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{e}_1\mathbf{a}\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_{n-1}\underbrace{\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}\,\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}\ \ldots\ \mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}) = (z_1, z_2, \ldots, z_k).$$

Тогда, согласно теореме 1.1,

$$y_j = \eta(ae_1 \ldots e_{n-2}$$
$$\underbrace{\eta(e_{n-1}\, e_1 \ldots e_{n-2}\; \eta(e_{n-1}\, e_1 \ldots e_{n-2}\; \ldots \eta(e_{n-1}\, e_1 \ldots e_{n-2}}_{s-2}$$
$$\eta(e_{n-1}e_1 \ldots\ e_{n-1}))\ldots\ ))).$$

Применяя к полученному равенству $s - 2$ раза равенство (2.4), $s - 1$ раз равенство (2.1) и один раз равенство (2.2), получим

$$y_j = \eta(ae_1 \ldots e_{n-2}$$
$$\underbrace{\eta(e_{n-1}\, e_1 \ldots e_{n-2}\; \eta(e_{n-1}\, e_1 \ldots e_{n-2}\; \ldots \eta(e_{n-1}\, e_1 \ldots e_{n-2}}_{s-2}$$
$$\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1}))\ldots\ ))) =$$
$$= \eta(ae_1 \ldots e_{n-2}$$
$$\underbrace{\eta(e_{n-1}\, e_1 \ldots e_{n-2}\; \eta(e_{n-1}\, e_1 \ldots e_{n-2}\; \ldots \eta(e_{n-1}\, e_1 \ldots e_{n-2}}_{s-3}$$
$$\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{i-1}\eta(e_i \ldots e_{n-1}e_1 \ldots e_i)e_{i+1} \ldots e_{n-1})))\ldots\ )) =$$
$$= \eta(ae_1 \ldots e_{n-2}$$
$$\underbrace{\eta(e_{n-1}\, e_1 \ldots e_{n-2}\; \eta(e_{n-1}\, e_1 \ldots e_{n-2}\; \ldots \eta(e_{n-1}\, e_1 \ldots e_{n-2}}_{s-3}$$
$$\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{i-1}e_i\, e_{i+1} \ldots e_{n-1}))\ldots\ )) =$$
$$= \eta(ae_1 \ldots e_{n-2}$$
$$\underbrace{\eta(e_{n-1}\, e_1 \ldots e_{n-2}\; \eta(e_{n-1}\, e_1 \ldots e_{n-2}\; \ldots \eta(e_{n-1}\, e_1 \ldots e_{n-2}}_{s-3}$$
$$\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1}))\ldots\ )) =$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \eta(ae_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots\ e_{n-1})) =$$
$$= \eta(ae_1 \ldots e_{i-1}\eta(e_i \ldots e_{n-1}e_1 \ldots e_i)e_{i+1} \ldots e_{n-1})) =$$
$$= \eta(ae_1 \ldots e_{i-1}e_ie_{i+1} \ldots e_{n-1}) = \eta(ae_1 \ldots\ e_{n-1}),$$

то есть

$$y_j = \eta(ae_1 \ldots e_{n-1}).$$

Из этого равенства и из равенства (1.1) вытекает $y_j = a$.

Согласно теореме 1.1,

$$z_j = \eta(e_1a_{\sigma(j)}e_2 \ldots e_{n-2}$$
$$\underbrace{\eta(e_{n-1}\, e_1 \ldots e_{n-2}\; \eta(e_{n-1}\, e_1 \ldots e_{n-2}\; \ldots \eta(e_{n-1}\, e_1 \ldots e_{n-2}}_{s-2}$$
$$\eta(e_{n-1}e_1 \ldots\ e_{n-1}))\ldots\ ))).$$

Кроме того, из (2.5), ввиду $\sigma(j) \neq j$, следует $a_{\sigma(j)} = e_1$. Таким образом,

$$z_j = \eta(e_1e_1e_2 \ldots e_{n-2}$$
$$\underbrace{\eta(e_{n-1}\, e_1 \ldots e_{n-2}\; \eta(e_{n-1}\, e_1 \ldots e_{n-2}\; \ldots \eta(e_{n-1}\, e_1 \ldots e_{n-2}}_{s-2}$$
$$\eta(e_{n-1}e_1e_2 \ldots\ e_{n-1}))\ldots\ ))).$$

Применяя к полученному равенству $s - 2$ раза равенство (2.4), $s - 1$ раз равенство (2.1) и один раз равенство (2.3), получим

$$z_j = \eta(e_1e_1e_2 \ldots e_{n-1}),$$

откуда и из (1.2) вытекает $z_j = e_1$. А так как

$$y_j = a,\ z_j = e_1,\ a \neq e_1,$$

то $y_j \neq z_j$, откуда

$$\eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{a}\, \underbrace{\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}\, \mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}\ \ldots\ \mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}}_{s}\ ) \neq$$

$$\neq \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{e}_1\mathbf{a}\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_{n-1}\underbrace{\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1} \ldots \mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}).$$

Следовательно, l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является абелевым. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Если $i = n - 1$, то равенство (2.1) совпадает с равенством (1.3), а равенства (2.2)–(2.4) выполняются тривиально, так как в каждом из них левая и правая части совпадают. Следовательно, теорема 1.3 является следствием теоремы 2.1 при $i = n - 1$.

3. Следствия. Сформулируем следствия из теоремы 2.1 для $i = 1$ и $i = 2$.

Следствие 3.1. *Пусть подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *не является тождественной, в* n*-арном группоиде* $< A, \eta >$ *существуют элементы* $a, e_1, \ldots, e_{n-1} \in A$ *такие, что* $a \neq e_1$, *и верны равенства* (1.1), (1.2), *а также равенства*

$$\eta(e_1 \ldots e_{n-1}e_1) = e_1,$$
$$\eta(ae_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1})) = \eta(a\eta(e_1e_2 \ldots e_{n-1}e_1)e_2 \ldots e_{n-1}),$$
$$\eta(e_1e_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1})) = \eta(e_1\eta(e_1e_2 \ldots e_{n-1}e_1)e_2 \ldots e_{n-1}),$$
$$\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1})) = \eta(e_{n-1}\eta(e_1e_2 \ldots e_{n-1}e_1)e_2 \ldots e_{n-1}).$$

Тогда l*-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является абелевым.*

Следствие 3.2. *Пусть подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *не является тождественной, в* n*-арном группоиде* $< A, \eta >$ *существуют элементы* $a, e_1, \ldots, e_{n-1} \in A$ *такие, что* $a \neq e_1$, *и верны равенства* (1.1), (1.2), *а также равенства*

$$\eta(e_2 \ldots e_{n-1}e_1e_2) = e_2,$$
$$\eta(ae_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1})) = \eta(ae_1\eta(e_2 \ldots e_{n-1}e_1e_2)e_3 \ldots e_{n-1}),$$
$$\eta(e_1e_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1})) = \eta(e_1e_1\eta(e_2 \ldots e_{n-1}e_1e_2)e_3 \ldots e_{n-1}),$$
$$\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1})) = \eta(e_{n-1}e_1\eta(e_2 \ldots e_{n-1}e_1e_2)e_3 \ldots e_{n-1}).$$

Тогда l*-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является абелевым.*

Сформулируем следствие из теоремы 2.1 для $n = 3$, $i = 1$.

Следствие 3.3. *Пусть подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *не является тождественной, в тернарном группоиде* $< A, \eta >$ *существуют элементы* $a, e_1, e_2 \in A$ *такие, что* $a \neq e_1$,

$$\eta(ae_1e_2) = a,\ \eta(e_1e_1e_2) = e_1,\ \eta(e_1e_2e_1) = e_1,$$
$$\eta(ae_1\eta(e_2e_1e_2)) = \eta(a\eta(e_1e_2e_1)e_2),$$
$$\eta(e_1e_1\eta(e_2e_1e_2)) = \eta(e_1\eta(e_1e_2e_1)e_2),$$
$$\eta(e_2e_1\eta(e_2e_1e_2)) = \eta(e_2\eta(e_1e_2e_1)e_2).$$

Тогда $(2s + 1)$*-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является абелевым.*

Если в теореме 2.1 для $n \geq 3$ положить $a = e_{n-1}$, то равенство (1.1) совпадает с равенством (1.3), а равенство (2.2) совпадает с равенством (2.4). Таким образом, верна

Теорема 3.1. *Пусть подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *не является тождественной, в* n*-арном группоиде* $< A, \eta >$, *где* $n \geq 3$, *существуют элементы* $e_1, \ldots, e_{n-1} \in A$ *такие, что* $e_1 \neq e_{n-1}$, *и верны равенства* (1.2), (1.3), *а также для некоторого* $i \in \{1, \ldots, n - 1\}$ *верны равенства* (2.1), (2.3) и (2.4). *Тогда* l*-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является абелевым.*

Замечание 3.1. Если $i = n - 1$, то равенство (2.1) совпадает с равенством (1.3), а равенства (2.3) и (2.4) выполняются тривиально. Следовательно, теорема 1.4 является следствием теоремы 3.1 при $i = n - 1$.

Сформулируем следствия из теоремы 3.1 для $i = 1$ и $i = 2$.

Следствие 3.4. *Пусть подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *не является тождественной, в* n*-арном группоиде* $< A, \eta >$, *где* $n \geq 3$, *существуют элементы* $e_1, \ldots, e_{n-1} \in A$ *такие, что* $e_1 \neq e_{n-1}$, *и верны равенства* (1.2), (1.3), *а также равенства*

$$\eta(e_1 \ldots e_{n-1}e_1) = e_1,$$
$$\eta(e_1e_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1})) = \eta(e_1\eta(e_1e_2 \ldots e_{n-1}e_1)e_2 \ldots e_{n-1}),$$
$$\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1})) = \eta(e_{n-1}\eta(e_1e_2 \ldots e_{n-1}e_1)e_2 \ldots e_{n-1}).$$

Тогда l*-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является абелевым.*

Следствие 3.5. *Пусть подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *не является тождественной, в n-арном группоиде* $< A, \eta >$, *где* $n \geq 3$, *существуют элементы* $e_1, \ldots, e_{n-1} \in A$ *такие, что* $e_1 \neq e_{n-1}$, *и верны равенства* (1.2), (1.3), *а также равенства*

$$\eta(e_2 \ldots e_{n-1}e_1e_2) = e_2,$$
$$\eta(e_1e_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1})) = \eta(e_1e_1\eta(e_2 \ldots e_{n-1}e_1e_2)e_3 \ldots e_{n-1}),$$
$$\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1})) = \eta(e_{n-1}e_1\eta(e_2 \ldots e_{n-1}e_1e_2)e_3 \ldots e_{n-1}).$$

Тогда l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является абелевым.*

Сформулируем следствие из теоремы 3.1 для $n = 3$, $i = 1$.

Следствие 3.6. *Пусть подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *не является тождественной, в тернарном группоиде* $< A, \eta >$, *где* $n \geq 3$, *существуют элементы* $e_1, e_2 \in A$ *такие, что* $e_1 \neq e_2$,

$$\eta(e_1e_1e_2) = e_1,\ \eta(e_2e_1e_2) = e_2,\ \eta(e_1e_2e_1) = e_1,$$
$$\eta(e_1e_1\eta(e_2e_1e_2)) = \eta(e_1\eta(e_1e_2e_1)e_2),$$
$$\eta(e_2e_1\eta(e_2e_1e_2)) = \eta(e_2\eta(e_1e_2e_1)e_2).$$

Тогда $(2s + 1)$*-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является абелевым.*

Так как в n-арной полугруппе $< A, \eta >$ равенства (2.2)–(2.4) из теоремы 2.1 выполняются для любого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, то справедлива

Теорема 3.2. *Пусть подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *не является тождественной, в n-арной полугруппе* $< A, \eta >$ *существуют элементы* $a, e_1, \ldots, e_{n-1} \in A$ *такие, что* $a \neq e_1$, *и верны равенства* (1.1), (1.2), *а также равенство*

$$\eta(e_i \ldots e_{n-1}e_1 \ldots e_i) = e_i.$$

для некоторого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. *Тогда l-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является абелевым.*

Замечание 3.2. Если $i = n - 1$, то равенство из теоремы 3.2 совпадает с равенством (1.3) из теоремы 1.3. Поэтому теорема 1.3 для n-арной полугруппы $< A, \eta >$ является следствием теоремы 3.2.

Сформулируем следствия из теоремы 3.2 для $i = 1$ и $i = 2$.

Следствие 3.7. *Пусть подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *не является тождественной, в n-арной полугруппе* $< A, \eta >$ *существуют элементы* $a, e_1, \ldots, e_{n-1} \in A$ *такие, что* $a \neq e_1$, *и верны равенства* (1.1), (1.2), *а также равенство*

$$\eta(e_1 \ldots e_{n-1}e_1) = e_1.$$

Тогда l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является абелевым.*

Следствие 3.8. *Пусть подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *не является тождественной, в n-арной полугруппе* $< A, \eta >$ *существуют элементы* $a, e_1, \ldots, e_{n-1} \in A$ *такие, что* $a \neq e_1$, *и верны равенства* (1.1), (1.2), *а также равенство*

$$\eta(e_2 \ldots e_{n-1}e_1e_2) = e_2.$$

Тогда l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является абелевым.*

Сформулируем следствие из теоремы 3.2 для $n = 3$, $i = 1$.

Следствие 3.9. *Пусть подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *не является тождественной, в тернарной полугруппе* $< A, \eta >$ *существуют элементы* $a, e_1, e_2 \in A$ *такие, что* $a \neq e_1$, *и верны равенства*

$$\eta(ae_1e_2) = a,\ \eta(e_1e_1e_2) = e_1,\ \eta(e_1e_2e_1) = e_1.$$

Тогда $(2s + 1)$*-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является абелевым.*

Замечание 3.3. Если в теореме 3.2 и во всех её следствиях потребовать, чтобы нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяла условию $\sigma^l = \sigma$, то получим новые результаты, в которых, согласно теореме 1.2, вместо l-арного группоида $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ будет фигурировать l-арная полугруппа $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. Например, самой теореме 3.2 будет соответствовать следующая

Теорема 3.3. *Пусть нетождественная подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *в n-арной полугруппе* $< A, \eta >$ *существуют элементы* $a, e_1, \ldots, e_{n-1} \in A$ *такие, что* $a \neq e_1$, *и верны равенства* (1.1), (1.2), *а также равенство*

$$\eta(e_i \ldots e_{n-1}e_1 \ldots e_i) = e_i.$$

для некоторого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. *Тогда* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *– неабелева l-арная полугруппа.*

Литература

1. Гальмак, А.М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак, А.Д. Русаков / Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.
2. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. Гальмак, А.М. Об операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2010. – № 1 (35). – С. 34–38.
4. Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
5. Гальмак, А.М. О не *n*-полуабелевых полиадических группоидах специального вида / А.М. Гальмак, Ю.И. Кулаженко // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2018. – № 2 (52). – С. 55–61.
6. Гальмак, А.М. Перестановочность элементов в полиадических группоидах специального вида / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3 (36). – С. 70–75.
7. Гальмак, А.М. О неабелевости полиадических группоидов специального вида / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2019. – № 1 (53). – С. 4–9.

[1]Могилевский государственный
университет продовольствия

[2]Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 10.04.2019