Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 2

УДК 530.12:531.51 *ФИЗИКА*

Н. В. МИЦКЕВИЧ, В. Н. ЗАХАРОВ

ТРАНСФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ОБЩЕКОВАРИАНТНЫХ НАБЛЮДАЕМЫХ

(Представлено академиком В. А. Фоком 23 IV 1970)

При использовании декартовых координат в традиционной формулировке частной теории относительности нахождение физических наблюдаемых величин не составляет проблемы. Но, как показал с особенной ясностью В. А. Фок ([1]), частная теория может быть изложена в произвольных координатах, как и общая теория относительности (о.т.о.), отличаясь от нее лишь нулевой кривизной пространства — времени. В этом случае, а в особенности в о.т.о., определение и анализ свойств наблюдаемых образуют самостоятельную проблему.

Не касаясь здесь тетрадного подхода к наблюдаемым, мы изберем математически более экономную концепцию А. Л. Зельманова ([2, 3]) (формализм хронометрических инвариантов), где систему отсчета можно реализовать телом отсчета, точки R которого неподвижны в данной системе координат, так что их мировые линии совпадают с линиями координатного времени. Позднее Зельманов дал обобщение своего формализма, свободное от необходимости связывать систему отсчета с той или иной системой координат ([4]) *. Величины, фигурирующие в общековариантном подходе, он назвал «присвоенными величинами», подчеркивая их связь с наблюдаемыми в данной системе отсчета. Конгруэнция мировых линий тела отсчета определяет поле единичного временноподобного вектора

$$\tau^\mu = (dx^\mu / ds)_R \tag{1}$$

и поле «пространственного метрического» тензора

$$b_{\mu\nu} = \tau_\mu \tau_\nu - g_{\mu\nu} \tag{2}$$

(как легко видеть, $\det b_{\mu\nu} \equiv 0$). Вектор τ^μ и тензор $b_{\mu\nu}$ позволяют ковариантным образом определить присвоенные величины для данной системы отсчета **, так как τ^μ осуществляет проектирование тензорных величин на направление физического времени (собственного времени данной системы отсчета), а $b_{\mu\nu}$ — на ортогональное ему пространственноподобное 3-многообразие ([4]), поскольку $\tau^\mu b_{\mu\nu} \equiv 0$, причем $b_{\mu\nu} b^{\nu\lambda} = -b_\mu^{\ \lambda}$, если сигнатура метрики равна (-2). Обозначая малыми буквами обычные тензорные величины, а большими — соответствующие присвоенные величины, определим

$$P_* = p^\mu \tau_\mu, \quad P_\mu = p^\nu b_{\mu\nu}, \tag{3}$$

так что, как и в обычной хронометрически инвариантной записи,

$$a_\mu c^\mu \equiv A_* C_* - (AC); \quad (AC) \stackrel{\mathrm{Def}}{=} b^{\mu\nu} A_\mu C_\nu. \tag{4}$$

Обобщение на случай тензора произвольного ранга очевидно; например, из $t_{\mu\nu}$ получим T_{**}, $T_{*\nu}$, $T_{\mu *}$ и $T_{\mu\nu}$.

---

* В частности, это важно для систем координат, где $g_{00} = 0$, которые вообще выпадали из сферы действия обычного формализма хронометрических инвариантов.

** Впервые этот подход был предложен Эккартом ([5]).

Наша задача — найти законы преобразования «наблюдаемых» типа (3) при переходах между различными системами отсчета, поэтому нам не потребуются дифференциальные соотношения нового формализма Зельманова. В отличие от работы ([5]), мы можем теперь использовать единую координатную систему, задав в ней две сравниваемые системы отсчета векторами τ^μ и $\bar{\tau}^\mu$. В системе τ^μ 4-сдвигу dx^μ каждой точки $\bar{R}$, покоящейся в системе $\bar{\tau}^\mu$, соответствуют пространственный и временной сдвиги $dL_\mu = b_{\mu\nu} dx^\nu_{\bar{R}}$ и $dT = \tau_\mu dx^\mu_{\bar{R}}$, причем $ds^2_{\bar{R}} = dT^2 - dL^2$ в соответствии с (4). Тогда скорость точек $\bar{R}$ в системе τ^μ (т. е. поле относительной скорости систем отсчета с точки зрения системы τ^μ) определяется как $V_\mu = (dL_\mu / dT)_{\bar{R}}$. Аналогично, с точки зрения системы $\bar{\tau}^\mu$ для точек R, покоящихся в системе τ^μ, имеем $\bar{V}_\mu = (d\bar{L}_\mu / d\bar{T})_R$. В силу того, что $\bar{\tau}^\nu b_{\mu\nu} = (dL_\mu / ds)_{\bar{R}}$ и $\tau^\alpha \bar{\tau}_\alpha = (dT / ds)_{\bar{R}}$, мы получаем явное выражение V_μ через τ^μ, $\bar{\tau}^\mu$ и $b_{\mu\nu}$:

$$V_\mu = \frac{\bar{\tau}^\nu b_{\mu\nu}}{\tau^\alpha \bar{\tau}_\alpha}; \text{ аналогично, } \bar{V}_\mu = \frac{\tau^\nu \bar{b}_{\mu\nu}}{\tau^\alpha \bar{\tau}_\alpha}. \tag{5}$$

Отсюда следуют соотношения $\tau^\alpha \bar{\tau}_\alpha = (1 - V_2)^{-1/2}$ и

$$\bar{\tau}_\mu = \frac{\tau_\mu - V_\mu}{\sqrt{1 - V^2}}, \tag{6}$$

$V^2 = b_{\mu\nu} V^\mu V^\nu$. Из очевидного тождества $\bar{b}_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} - \tau_\mu \tau_\nu + \bar{\tau}_\mu \bar{\tau}_\nu$ и из (6) следует закон преобразования

$$\bar{b}_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + \frac{\tau_\mu \tau_\nu \cdot V^2 + V_\mu V_\nu - \tau_\mu V_\nu - \tau_\nu V_\mu}{1 - V^2}. \tag{7}$$

Легко видеть, что

$$V^2 = \bar{V}^2, \quad \bar{V}^2 = \bar{b}_{\mu\nu} \bar{V}^\mu \bar{V}^\nu. \tag{8}$$

Заканчивая сравнение скоростей V_μ и $\bar{V}_\nu$, приведем следующие из (5) формулы $\bar{V}_\mu \pm V_\mu = (\bar{\tau}_\mu \pm \tau_\mu)(1 \mp 1 / \tau^\alpha \bar{\tau}^\alpha)$ и $V^2 / \sqrt{1 - V^2} = g^{\mu\nu} V_\mu \bar{V}_\nu = -(\mathbf{V}\bar{\mathbf{V}})$, из которых видно, что скорости $\bar{V}_\mu$ и V_μ в 4-мерном смысле не коллинеарны.

Используя соотношение (6) в определении $\bar{P}_* = p^\mu \bar{\tau}_\mu$, найдем закон преобразования присвоенного скаляра

$$\bar{P}_* = \frac{P_* - (\mathbf{VP})}{\sqrt{1 - V^2}}. \tag{9}$$

Этот закон справедлив при произвольном относительном движении систем отсчета и по своему виду является прямым обобщением известной формулы Лоренца. Закон преобразования присвоенного вектора имеет более громоздкий вид:

$$\bar{P}_\mu = P_\mu + (1 - V^2)^{-1} \cdot [P_* (\tau_\mu V^2 - V_\mu) - (\mathbf{VP}) \cdot (\tau_\mu - V_\mu)] \tag{10}$$

(он следует из определения (3) и закона (7)). Свертывая (10) с p^μ и полагая $P_\mu \parallel V_\mu$, получим лоренцев по форме закон преобразования модуля:

$$\bar{P} = \frac{P - VP_*}{\sqrt{1 - V^2}}. \tag{11}$$

Приведем также закон преобразования скалярного произведения присвоенных векторов:

$$\overline{(\mathbf{AC})} = (\mathbf{AC}) - A_* C_* + \frac{(A_* - (\mathbf{VA}))(C_* - (\mathbf{VC}))}{1 - V^2}, \tag{12}$$

Этот закон по виду вполне подобен известному из традиционной частной теории относительности.

Переходя к теореме сложения физических скоростей при произвольном заданном относительном движении систем отсчета, рассмотрим движение некоторой точки P. Ее скорость в системах τ^μ и $\bar{\tau}^\mu$ соответственно определена как

$$U_\mu = \frac{b_{\mu\nu} dx_P^\nu}{\tau_\alpha dx_P^\alpha} \text{ и } \overline{U}_\mu = \frac{\bar{b}_{\mu\nu} dx_P^\nu}{\bar{\tau}_\alpha dx_P^\alpha}. \tag{13}$$

Подставляя в $\overline{U}_\mu$ формулы (6) и (7) и выражая соответствующие члены через U_μ, получим искомый закон для компонент скорости:

$$\overline{U}_\mu = \frac{\sqrt{1-V^2}}{1-(\mathbf{UV})}\left(U_\mu - \tau_\mu + \frac{(\tau_\mu - V_\mu)(1-(\mathbf{UV}))}{1-V^2}\right). \tag{14}$$

Его форма не похожа на обычную запись теоремы сложения скоростей в частной теории относительности, но является ее обобщением. Действительно, имеет место соотношение

$$1 - \overline{U^2} = \frac{(1-V^2)(1-U^2)}{(1-(\mathbf{UV}))^2}, \tag{15}$$

следующее из (13) и совпадающее с формулой (16.11) в [1]. Из (15) получим

$$\overline{U^2} = \frac{(\mathbf{UV})^2 - U^2V^2 + (\mathbf{U}-\mathbf{V})^2}{(1-(\mathbf{UV}))^2}, \tag{16}$$

откуда в случае $U_\mu \| V_\mu$ следует известная формула

$$\overline{U} = \frac{U-V}{1-UV}. \tag{17}$$

Итак, мы видим, что законы преобразования наблюдаемых в о.т.о. (и для произвольно движущихся систем отсчета в частной теории относительности) являются естественным обобщением формул Лоренца. Мы привели преобразования лишь присвоенных величин, построенных из тензоров ранга 1; для тензоров более высокого ранга их можно вывести тем же методом. Заметим, что правые части таких формул содержат комбинации всех присвоенных величин, получающихся из данного тензора. Например, в случае $T_{**} = t_{\mu\nu}\tau^\mu\tau^\nu$

$$\overline{T}_{**} = (1-V^2)^{-1}\cdot(T_{**} - T_{*\mu}V_\nu b^{\mu\nu} - T_{\mu *}V_\nu b^{\mu\nu} + T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu). \tag{18}$$

В заключение отметим, что для сравнения полученных здесь ковариантных законов с результатами работы [5], где рассматривались преобразования обычных хронометрических инвариантов, необходимо перейти к системе координат, в которой мировые линии точек тела отсчета являются линиями координатного времени, и где, следовательно, имеем $(\tau^\mu = (dx^\mu/ds)_R = \delta_0^\mu/\sqrt{g_{00}}$. Тогда из (2) следует, что $b_{00} = b_{0i} = 0$; $b_{ij} = \dfrac{g_{0i}g_{j0}}{g_{00}} - g_{ij}$. Кроме того, левые части ковариантных законов надлежит преобразовать к системе координат, в которой $\bar{\tau}'^\mu = \delta_0^\mu/\sqrt{g'_{00}}$ (преобразование, «дополнительное» к хронометрическим и 3-мерным преобразованиям Зельманова). Тогда, например, из закона преобразования (10) следует закон преобразования хронометрически инвариантного вектора при переходе к новой системе отсчета и одновременном переходе к связанной с ней системе координат в форме, известной из [5]:

$$\overline{P}'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\left[P^i - P_* V^i \frac{\left(1 - \dfrac{g_{0m}}{\sqrt{g_{00}}} P^m/P_*\right)}{\left(1 - \dfrac{g_{0n}}{\sqrt{g_{00}}} V^n\right)}\right]. \tag{19}$$

Авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую благодарность В. А. Фоку и А. Л. Зельманову за интерес к работе.

Университет дружбы народов
им. Патриса Лумумбы
Москва
Научно-исследовательский институт ядерной физики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, М., 1961. [2] А. Л. Зельманов, ДАН, 107, 815 (1956). [3] А. Л. Зельманов, Тр. VI Совещ. по космогонии, М., 1959. [4] А. Л. Зельманов, Докл. на V Международн. конфер. по гравитации и теории относительности, Тбилиси, 1968. GR—5, Тез. докл. V Международн. конфер. по гравитации и теории относительности Тбилиси, 1968, стр. 115. [5] В. Н. Захаров, Н. Н. Мицкевич, Там же, стр. 113. [6] K. Eckart, Phys. Rev., 58, 919 (1940).