Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (114), 2019

УДК 517.538.5

Асимптотика аппроксимаций Эрмита-Паде системы трех экспонент

Е.П. Кечко, М.В. Сидорцов

Для системы $\{e^{jz}\}_{j=0}^{3}$ найдена скорость сходимости аппроксимаций Эрмита-Паде 2-го рода. Доказанные теоремы дополняют результаты, полученные ранее О. Перроном, Д. Браессом, А.И. Аптекаревым, А.П. Старовойтовым и др.
Ключевые слова: совместные аппроксимации Паде, аппроксимации Эрмита-Паде 2-го рода, асимптотические равенства, интегралы Эрмита.

The convergence rate of type II Hermite-Padé approximants for system $\{e^{jz}\}_{j=0}^{3}$ is found. The theorems proved in the paper complement the results obtained earlier by O. Perron, D. Braess, A.I. Aptekarev, A.P. Starovoitov and other authors.
Keywords: simultaneous Padé approximations, type II Hermite-Padé approximations, asymptotic equalities, Hermite integrals.

Введение. Рассмотрим вектор $\vec{f}=\{f_j(z)\}_{j=1}^{k}$, состоящий из аналитических в нуле координатных функций $f_j(z)$. Для индекса $n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$ и мультииндекса $\vec{m}=(m_1,m_2,\ldots,m_k)$, $m_j\in\mathbb{N}_0$ существуют многочлены $Q_{n,\vec{m}}(z)=Q_{n,\vec{m}}(z;\vec{f})\not\equiv 0$, $P_{n,\vec{m}}^{j}(z)=P_{n,\vec{m}}^{j}(z;\vec{f})$, $j=1,2,\ldots,k$: $\deg Q_{n,\vec{m}}\le m$, $\deg P_{n,\vec{m}}^{j}\le n_j$, $j=1,2,\ldots,k$, для которых в некоторой окрестности нуля

$$R_{n,\vec{m}}^{j}(z)=R_{n,\vec{m}}^{j}(z;\vec{f})=Q_{n,\vec{m}}(z)f_j(z)-P_{n,\vec{m}}^{j}(z)=O(z^{n+|m|+1}),\ z\to 0, \tag{1}$$

где $|m|=\sum_{i=1}^{k}m_i$, $n_j=n+|m|-m_j$, $j=1,2,\ldots,k$.

При $k=1$ вектор $\vec{f}$ является функцией $f(z):=f_1(z)$, соответствующие многочлены $q_m(z):=Q_{n,\vec{m}}(z;f)$, $p_n(z):=P_{n,\vec{m}}^{1}(z;f)$ являются многочленами Паде, а их отношение задает единственную рациональную функцию $\pi_{n,m}(z)=\pi_{n,m}(z;f)=p_n(z)/q_m(z)$, которую называют аппроксимацией Паде функции f. При $k\ge 2$, в отличие от случая $k=1$, дроби

$$\pi_{n,\vec{m}}^{j}(z)=\pi_{n,\vec{m}}^{j}(z;\vec{f})=\frac{P_{n,\vec{m}}^{j}(z)}{Q_{n,\vec{m}}(z)},\ j=1,2,\ldots,k,$$

условиями (1) определяются, вообще говоря, неоднозначно. Если вектор $\vec{\pi}_{n,\vec{m}}=\{\pi_{n,\vec{m}}^{j}(z)\}_{j=1}^{k}$ определяется однозначно, то координатные функции $\pi_{n,\vec{m}}^{j}(z)$ называются *аппроксимациями Эрмита-Паде 2-го рода* (или *совместными аппроксимациями Паде*), а многочлены $Q_{n,\vec{m}}(z)$, $P_{n,\vec{m}}^{1}(z),\ldots,P_{n,\vec{m}}^{k}(z)$ – *многочленами Эрмита-Паде 2-го рода*. Диагональному случаю соответствует набор индексов $n=m_1=\ldots=m_k$.

Вектор $\vec{\pi}_{n,\vec{m}}=\{\pi_{n,\vec{m}}^{j}(z)\}_{j=1}^{k}$ определяется единственным образом (см. [1, гл. 4, § 1]), например, для совершенных систем функций $\vec{f}=\{f_j(z)\}_{j=1}^{k}$. В частности, если $\{\lambda_j\}_{j=1}^{k}$ – различные не равные нулю комплексные числа, то система $\vec{f}=\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{k}$ является совершенной. Без формального определения этот факт был установлен Ш. Эрмитом в работе [2], посвященной доказательству трансцендентности числа e. Им также были найдены явные выражения для многочленов, удовлетворяющие условиям (1), и остаточной функции: если $\vec{f}=\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{k}$, то

$$Q_{n,\vec{m}}(z)=\frac{z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!}\int\limits_0^{+\infty}\left[x^n\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{m_i}\right]e^{-xz}dx, \qquad (2)$$

$$P_{n,\vec{m}}^{j}(z)=\frac{e^{\lambda_j z}z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!}\int\limits_{\lambda_j}^{+\infty}\left[x^n\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{m_i}\right]e^{-xz}dx, \qquad (3)$$

$$R_{n,\vec{m}}^{j}(z)=\frac{e^{\lambda_j z}z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!}\int\limits_{0}^{\lambda_j}\left[x^n\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{m_i}\right]e^{-xz}dx,\ j=1,2,\ldots,k.$$

В (2) и (3) $\operatorname{Re} z>0$. В случае $\operatorname{Re} z\le 0$ значения многочленов $Q_{n,\vec{m}}(z)$ и $P_{n,\vec{m}}^{j}(z)$ определяются с помощью аналитического продолжения.

Случай $k=1$, когда мы имеем дело с аппроксимациями Паде, достаточно хорошо изучен. Так Паде (см. [3]) нашел явный вид для числителя и знаменателя $\pi_{n,m}(z)$ таких аппроксимаций в детерминантной форме и доказал, что при $n/m\to\gamma$, $0\le\gamma\le+\infty$, на компактах из $\mathbb{C}$ дроби $\pi_{n,m}(z)$ равномерно сходятся к e^z. О. Перрон [4] обобщил данный результат, доказав сходимость $\pi_{n,m}(z)$ к e^z при $n+m\to\infty$. На основе результата численного эксперимента Г. Мейнардус сформулировал гипотезу об асимптотике поведения разности $e^z-\pi_{n,m}(z)$. Её решение получил Д. Браесс [5], доказав следующее утверждение: *для любого комплексного* z *при* $n+m\to\infty$

$$e^z-\pi_{n,m}(z)=(-1)^m\frac{m!n!e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!(n+m+1)!}z^{n+m+1}(1+o(1)).$$

При получении своего результата Д. Браесс существенно опирается на интегральные представления числителя и знаменателя $\pi_{n,m}(z)$, полученные О. Перроном [4].

Е.М. Никишиным была поставлена задача об исследовании сходимости совместных аппроксимаций Паде для системы $\vec{f}=\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{k}$, где λ_j – различные отличные от нуля комплексные числа. Решение данной задачи было получено А.И. Аптекаревым [6]: *для любого* $z\in\mathbb{C}$ *при* $n+|m|\to+\infty$

$$Q_{n,\vec{m}}(z)=\exp\left\{-\frac{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j m_j}{n+|m|}z\right\}(1+o(1)), \qquad (4)$$

а дроби $\pi_{n,\vec{m}}^{j}(z;e^{\lambda_j\xi})$ *сходятся к* $e^{\lambda_j z}$ *равномерно на компактах в* $\mathbb{C}$. Отметим, что за исключением очень частных случаев (см. [7], [8], [9]), до сих пор неизвестно, какова скорость сходимости аппроксимаций Эрмита-Паде 2-го рода (подробнее см. [9]).

В данной работе получены результаты о скорости сходимости аппроксимаций Эрмита-Паде 2-го рода для системы экспонент $\{e^{jz}\}_{j=1}^{3}$, охватывающие в том числе и недиагональный случай. Методы (чаще всего – это метод Лапласа и метод перевала), применяемые при изучении асимптотических свойств диагональных аппроксимаций Эрмита-Паде, в общем случае не столь эффективны. Поэтому при доказательстве теорем применяется новый подход, который опирается на теорему Тейлора и некоторые эвристические соображения.

Основные результаты. В общем случае рассматриваемая задача может быть сведена к нахождению асимптотик интегралов Лапласа (см. [10, с. 390]), где вместо $\lambda S(x)$ стоит функция $S(x,n,m_1,\ldots,m_k)$, зависящая, вообще говоря, от $k+1$ различных параметров. Далее предполагаем наличие не более четырех параметров. В такой ситуации при исследовании асимптотик соответствующих интегралов несколько иначе, чем при обосновании метода Лапласа [10, § 43, п. 1], будем учитывать известный эвристический вывод о том, что основной вклад в асимптотику интеграла Лапласа вносит интеграл по достаточно малой окрестности точки максимума функции $S(x,n,m_1,m_2,m_3)$.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть* $\vec{m}=(m_1,m_2,m_3)$ *и* n, m_1, m_2, m_3 *– произвольные целые неотрицательные числа, а* $\vec{f}=\{e^{jz}\}_{j=1}^3$. *Тогда если* $\lim\limits_{n\to\infty}|m|/\sqrt{n}=0$, *то для любого комплексного числа* $|z|\le L$ *равномерно по всем* $|m|$, $0\le|m|\le m(n)$, *при* $n\to+\infty$

$$R_{n,\vec{m}}^1(z)=(-1)^{|m|}\frac{2^{m_3}m_1!n!z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_1+1)!}e^{\frac{m_1+1}{n+m_1+2}z}(1+o(1)), \tag{5}$$

$$R_{n,\vec{m}}^2(z)=(-1)^{|m|}\frac{(-1)^{m_1}2^{n+m_2+1}m_2!n!z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_2+1)!}e^{\frac{2(m_2+1)}{n+m_2+2}z}(1+o(1)), \tag{6}$$

$$R_{n,\vec{m}}^3(z)=(-1)^{m_3}\frac{2^{m_1}3^{n+m_3+1}m_3!n!z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_3+1)!}e^{\frac{3(m_3+1)}{n+m_3+2}z}(1+o(1)). \tag{7}$$

Доказательство. Рассмотрим

$$R_{n,\vec{m}}^1(z)=\frac{z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!}\int_0^1 x^n(x-1)^{m_1}(x-2)^{m_2}(x-3)^{m_3}e^{(1-x)z}dx.$$

В интеграле

$$I_1(z)=\int_0^1 x^n(x-1)^{m_1}(x-2)^{m_2}(x-3)^{m_3}e^{(1-x)z}dx,$$

сделаем замену $x=1-u$ и получим

$$I_1(z)=(-1)^{|m|}2^{m_3}\int_0^1(1-u)^n u^{m_1}(1+u)^{m_2}\left(1+\frac{u}{2}\right)^{m_3}e^{uz}du.$$

Рассмотрим интеграл

$$J_1^p(z)=\int_0^1(1-u)^n u^{m_1+p}(1+u)^{m_2}\left(1+\frac{u}{2}\right)^{m_3}du.$$

Используя формулу бинома Ньютона и равенство $\left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^k\right)\left(\sum_{t=0}^m C_m^t x^t\right)=$ $=\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{t=0}^k C_n^t C_m^{k-t}\right)x^k$, а затем свойства бета-функции Эйлера, легко показать, что

$$J_1^p(z)=\sum_{k=0}^{m_2+m_3}\left(\sum_{j=0}^k C_{m_2}^j C_{m_3}^{k-j}\frac{1}{2^{k-j}}\right)B(m_1+p+k+1;n+1).$$

Исследуем асимптотику поведения интеграла $J_1^0(z)$ при $n\to\infty$. Выражая бета-функцию Эйлера через гамма-функцию, получим:

$$J_1^0(z)=\sum_{k=0}^{m_2+m_3}\left(\sum_{j=0}^k C_{m_2}^j C_{m_3}^{k-j}\frac{1}{2^{k-j}}\right)B(m_1+k+1;n+1)=$$

$$=\frac{\Gamma(m_1+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m_1+n+2)}\left[1+\sum_{k=1}^{m_2+m_3}\left(\sum_{j=0}^k C_{m_2}^j C_{m_3}^{k-j}\frac{1}{2^{k-j}}\right)\frac{(m_1+1)(m_1+2)\ldots(m_1+k)}{(n+m_1+2)\ldots(n+m_1+k+1)}\right].$$

Так как

$$\left|\sum_{k=1}^{m_2+m_3}\left(\sum_{j=0}^k C_{m_2}^j C_{m_3}^{k-j}\frac{1}{2^{k-j}}\right)\frac{(m_1+1)(m_1+2)\ldots(m_1+k)}{(n+m_1+2)\ldots(n+m_1+k+1)}\right|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{m_2+m_3}\left(\sum_{j=0}^k C_{m_2}^j C_{m_3}^{k-j}\frac{1}{2^{k-j}}\right)\left|\frac{|m|}{n+|m|}\right|^k=\sum_{k=0}^{m_2}\left(C_{m_2}^k\left|\frac{|m|}{n+|m|}\right|^k\right)\sum_{t=0}^{m_3}\left(C_{m_3}^t\frac{1}{2^t}\left|\frac{|m|}{n+|m|}\right|^t\right)-1=$$

$$=\left(1+\frac{|m|}{n+|m|}\right)^{m_2}\left(1+\frac{|m|}{2(n+|m|)}\right)^{m_3}-1,$$

учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}|m|/\sqrt{n}=0$, получим, что последнее выражение стремится к нулю при $n\to\infty$, т. е.

$$J_1^0(z)=\frac{\Gamma(m_1+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m_1+n+2)}(1+o(1)). \tag{8}$$

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что при $n \to \infty$

$$J_1^p(z) = \frac{\Gamma(m_1+p+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m_1+n+p+2)}(1+o(1)), \quad p = 1,2,\dots . \tag{9}$$

Подберем теперь u_0 так, чтобы $J_1^1 - u_0 J_1^0 = 0$. При $n \to \infty$

$$u_0 = \frac{J_1^1}{J_1^0} = \frac{m_1+1}{n+m_1+2}(1+o(1)).$$

Следовательно, при достаточно больших n имеем $u_0 \in [0,1]$.

Разлагая в ряд Тейлора функцию $e^{(u-u_0)z}$ в окрестности точки u_0, получим

$$e^{uz} = e^{u_0 z} e^{(u-u_0)z} = e^{u_0 z}\left\{1 + z(u-u_0) + \frac{z^2}{2!}(u-u_0)^2 + \dots\right\} = e^{u_0 z} + e^{u_0 z} z(u-u_0) + \rho_u(z),$$

где при $|z| \le L$ и $u \in [0,1]$

$$|\rho_u(z)| \le |u-u_0|^2 \left\{\frac{L^2}{2!} + \dots + \frac{L^n}{n!} + \dots\right\} \le L_1 |u-u_0|^2 .$$

Учитывая (8), (9) и выбор u_0, получаем равенство

$$I_1(z) = (-1)^{|m|} 2^{m_3}\left[\int_0^1 (1-u)^n u^{m_1}(1+u)^{m_2}\left(1+\frac{u}{2}\right)^{m_3} e^{u_0 z} du + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 (1-u)^n u^{m_1}(1+u)^{m_2}\left(1+\frac{u}{2}\right)^{m_3} \rho_u(z) du\right] = (-1)^{|m|} 2^{m_3}\left[e^{u_0 z} J_1^0 + A_\rho(z)\right], \tag{10}$$

где при $|z| \le L$

$$|A_\rho(z)| \le L_1 \int_0^1 (1-u)^n u^{m_1}(1+u)^{m_2}\left(1+\frac{u}{2}\right)^{m_3}(u-u_0)^2 du = L_1(J_1^2 - u_0 J_1^1).$$

В данном выражении берем во внимание, что $(u-u_0)^2 = (u^2 - uu_0) - (uu_0 - u_0^2)$ и $J_1^1 - u_0 J_1^0 = 0$. Имеем

$$|A_\rho(z)| \le L_1\left\{\frac{\Gamma(m_1+3)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+m_1+4)} - u_0 \frac{\Gamma(m_1+2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+m_1+3)}\right\}.$$

При $n \to \infty$ получаем

$$|A_\rho(z)| \le L_1 u_0 \frac{\Gamma(m_1+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+m_1+2)} o(1).$$

Принимая во внимание последнее неравенство и (10) будем иметь

$$I_1(z) = (-1)^{|m|} 2^{m_3} e^{u_0 z} B(m_1+1; n+1)(1+o(1)).$$

Тогда при $n \to \infty$ и $|z| \le L$ окончательно получаем

$$R^1_{n.\vec{m}}(z) = (-1)^{|m|} 2^{m_3} \frac{|m|!n!z^{n+|m|+1}}{(n+m_1+1)!(n+|m|)!} e^{(m_1+1)/(n+m_1+2)z}(1+o(1)).$$

Равенство (5) доказано. Равенства (6) и (7) доказываются аналогично. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть* n, m_1, m_2, m_3 *– произвольные целые неотрицательные числа, а* $\pi^j_{n,\vec{m}}(z)$, $j = 1,2,3$ *– аппроксимации Эрмита-Паде для* $\vec{f} = \{e^{jz}\}_{j=1}^3$. *Тогда если* $\lim\limits_{n\to\infty} |m|/\sqrt{n} = 0$, *то для любого комплексного числа* z *равномерно по всем* $|m|$, $0 \le |m| \le m(n)$, *при* $n \to +\infty$

$$e^z - \pi^1_{n.\vec{m}}(z) = (-1)^{|m|} \frac{2^{m_3} m_1! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_1+1)!} e^{\frac{m_1+1}{n+m_1+2}z} e^{\frac{m_1+2m_2+3m_3}{n+|m|}z}(1+o(1)),$$

$$e^{2z} - \pi^2_{n.\vec{m}}(z) = (-1)^{|m|} \frac{(-1)^{m_1} 2^{n+m_2+1} m_2! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_2+1)!} e^{\frac{2(m_2+1)}{n+m_2+2}z} e^{\frac{m_1+2m_2+3m_3}{n+|m|}z}(1+o(1)),$$

$$e^{3z} - \pi^3_{n.\vec{m}}(z) = (-1)^{m_3} \frac{2^{m_1} 3^{n+m_3+1} m_3! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_3+1)!} e^{\frac{3(m_3+1)}{n+m_3+2}z} e^{\frac{m_1+2m_2+3m_3}{n+|m|}z}(1+o(1)).$$

Доказательство. В рассматриваемом случае равенство (4) можно записать в вид

$$Q_{n,\vec{m}}(z) = \exp\left\{-\frac{m_1+2m_2+3m_3}{n+|m|}z\right\}(1+o(1)).$$

Теперь нетрудно заметить, что теорема является следствием предыдущего равенства и равенства (5)–(7). Теорема 2 доказана.

Заключение. Из теорем 1 и 2 в качестве частных случаев можно получить уже известные результаты. Например, полагая в теореме 2 $m_3 = 0$, получаем утверждение равносильное теореме 1 из работы [8] при $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$:

Следствие. *Пусть* $\vec{f} = \{e^{jz}\}_{j=1}^2$. *Тогда если* $\lim\limits_{n\to\infty} |m|/\sqrt{n} = 0$, *то для любого комплексного числа* z *равномерно по всем* $|m|$, $0 \le |m| \le m(n)$, *при* $n \to +\infty$

$$e^{z} - \pi^1_{n,\vec{m}}(z) = (-1)^{|m|} \frac{m_1! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_1+1)!} e^{\frac{m_1}{n+m_1}z} e^{\frac{m_1+2m_2}{n+|m|}z}(1+o(1)),$$

$$e^{2z} - \pi^2_{n,\vec{m}}(z) = (-1)^{|m|} \frac{(-1)^{m_1} 2^{n+m_2+1} m_2! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_2+1)!} e^{\frac{2m_2}{n+m_2}z} e^{\frac{m_1+2m_2}{n+|m|}z}(1+o(1)).$$

Кроме того, не сложно заметить, что при $k = 1$ ($m_1 = m$, $m_2 = m_3 = 0$) из теоремы 2 следует результат Д. Браесса [5].

Исследование выполнено при финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф18М-025).

Литература

1. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М. : Наука, 1988 – 256 с.

2. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Acad. Sci. – 1873. – Vol. 77. – Pp. 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.

3. Бейкер, Дж. мл. Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М. : Мир, 1986. – 502 с.

4. Perron, O. Die Lehre von den Kettenbrüchen / O. Perron. – Leipzig : Teubner, 1929. – 524 p.

5. Braess, D. On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^z, II / D. Braess // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40, № 4. – P. 375–379.

6. Аптекарев, А.И. О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.

7. Kuijlaars, A.B.J. Type II Hermite-Padé approximation to the exponential function / A.B.J. Kuijlaars, H. Stahl, W. Van Assche, F. Wielonsky // J. of Comput. and Appl. Math. – 2007. – Vol. 207, № 2. – P. 227–244.

8. Старовойтов, А.П. Эрмитовская аппроксимация двух экспонент / А.П. Старовойтов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13, вып. 1, ч. 2. – С. 88–91.

9. Старовойтов, А.П. Аппроксимации Эрмита-Паде функций Миттаг-Леффлера / А.П. Старовойтов // Труды МИАН. – 2018. – Т. 301. – С. 241–258.

10. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного: учеб. для вузов / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – 3-е изд., испр. – М. : Наука, 1989. – 480 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 05.04.2019