Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 2

УДК 519.45

МАТЕМАТИКА

Я. Г. БЕРКОВИЧ

ПОДГРУППОВОЕ И НОРМАЛЬНОЕ СТРОЕНИЕ КОНЕЧНОЙ p-ГРУППЫ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 11 VI 1970)

1°. В структурной теории конечных p-групп центральное место занимает вопрос о существовании нормальных подгрупп экспоненты p. Известно, что если все нормальные подгруппы экспоненты p группы G имеют «малые» порядки, то G имеет несложное строение. Так, Ф. Холл ([1]) показал, что если p-группа G не содержит нормальной подгруппы порядка p^{p-1} и экспоненты p, то она регулярна. Глубокое обобщение этого результата получил Н. Блэкберн ([2]), давший полное описание p-групп без нормальных подгрупп экспоненты p и порядка p^p. Оказывается, что с рассматриваемым вопросом тесно связан вопрос о числе решений уравнения $x^{p^n} = 1$ в p-группе (эту связь впервые подметил Ф. Холл ([1])).

В настоящей заметке формулируется неформальное обобщение цитированной выше теоремы Блэкберна (теорема 1в); почти все результаты 2°, 3° выводятся из теоремы 1в. В 4° обобщается важная теорема Ч. Хоби, доказавшего, что если p-группа нечетного порядка содержит элементарную подгруппу порядка p^4, то она содержит нормальную элементарную подгруппу порядка p^4 ([6]).

В заметке рассматриваются только конечные p-группы; p — всегда простое число; $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G; $p^{d(G)} = |G\colon \Phi(G)|$; $|G|$ — порядок группы G; $p^iG = \langle x^{p^i} | x \in G\rangle$; $\Omega_i(G) = \langle x | x \in G, x^{p^i} = 1\rangle$; p-группа G абсолютно регулярна, если $|G\colon pG| < p^p$ (абсолютно регулярные группы регулярны в смысле Ф. Холла; о регулярных p-группах см. в § 3.10 монографии ([3])); группа G порядка p^m, $m > 1$, и класса нильпотентности $m-1$ называется группой максимального класса (о p-группах максимального класса см. в § 3.14 монографии ([3])); $c_n(G)$ — число циклических подгрупп порядка p^n в группе G.

Положим $K_1(G) = G$, для $i > 0$ полагаем $K_{i+1}(G) = [G, K_i(G)]$.

2°. Лемма 1. *Пусть G — группа максимального класса и порядка p^m.*

а) *Если H — подгруппа в G с $d(H) > p-1$ и $p > 2$, то G изоморфна силовской p-подгруппе симметрической группы степени p^2.*

б) *Если $m > p+1$, то $c_1(G) \equiv 1 + p + \ldots + p^{p-2} (\mathrm{mod}\, p^p)$.*

в) *Если $m > p+1$, то $c_2(G) \equiv p^{p-2} (\mathrm{mod}\, p^{p-1})$.*

г) *Если $n > 2$, $p > 2$, то $c_n(G) \equiv O (\mathrm{mod}\, p^{p-1})$.*

Лемма 1а) обобщает такой результат Блэкберна: если φ — эпиморфизм p-группы G максимального класса и нечетного порядка на силовскую p-подгруппу симметрической группы степени p^2, то φ — изоморфизм.

Теорема 1. *Пусть p-группа G не абсолютно регулярна и не группа максимального класса. Тогда*

а) $c_1(G) \equiv 1 + p + \ldots + p^{p-1} (\mathrm{mod}\, p^p)$;

б) *если $n > 1$, то $c_n(G) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, p^{p-1})$;*

в) *G содержит сравнимое с 1 по модулю p число подгрупп порядка p^p и экспоненты p.*

Теорема 2. *Пусть p-группа G не является группой максимального класса, $n > p+1$. Тогда G содержит кратное p^2 число подгрупп максимального класса и порядка p^n.*

Ранее автор доказал теоремы 1 и 2 для 2-групп ([4]); см. также в ([5]) принадлежащую Дж. Томпсону теорему 6.2, в которой доказана теорема 1а) для 2-групп.

В. Г. Беркович, используя теоремы 1 и 2 (для частного случая 2-групп), доказал такой полезный результат:

Теорема 3 (В. Г. Беркович). *Пусть группа G порядка p^n допускает автоморфизм порядка p^{n-1}. Тогда, если $n > 3$, справедливо одно из утверждений:*

1) *G — циклическая нечетного порядка;*
2) *G — обобщенная группа кватернионов,*
3) *G — группа диэдра.*

Теорема 4. *Пусть p-группа G не является группой максимального класса; H — такая ее подгруппа, что $|H: pH| \geqslant p^{p-1}$; $n > p+1$; $|H| < p^n$. Тогда число заключенных между H и G подгрупп максимального класса и порядка p^n кратно p.*

В ходе доказательства теоремы 4 используются представляющие некоторый интерес леммы.

Лемма 2. *p-группа G тогда и только тогда является группой максимального класса, когда нормализатор некоторой ее подгруппы является группой максимального класса.*

Лемма 3. *Пусть H — такая подгруппа p-группы G, что $|H: pH| = p^{p-1}$; G не абсолютно регулярна и не группа максимального класса; $p^n > |H|$. Тогда между H и G содержится кратное p число абсолютно регулярных подгрупп порядка p^n.*

Лемма 4. *Пусть p-группа G не абсолютно регулярна и не группа максимального класса, $n > p-1$. Тогда G содержит кратное p число абсолютно регулярных подгрупп порядка p^n.*

Очевидно, лемма 4 обобщает теорему 1в).

Одним из применений теоремы 1в) является теорема 5, дающая прозрачное описание широкого класса p-групп.

Теорема 5. *Пусть подгруппа Фраттини p-группы G абсолютно регулярна. Положим $\Omega_1(\Phi(G)) = \Phi_0$, $|\Phi_0| = p^k$ (так что $k < p$). Тогда $G = AB$, при этом:*

1) *$\Phi(G) \leqslant B$ и B абсолютно регулярная или нерегулярная группа максимального класса;*

2) *A порождена Φ_0 и всеми содержащими Φ_0 и нормальными в G подгруппами порядка p^{k+1} и экспоненты p;*

3) *если B нерегулярна, то она максимального класса и $p = k+1$.*

3°. p-группу G назовем R_n^k-группой, если для любых двух ее неинцидентных подгрупп H и F индексов p^n и p^{n+k} в G соответственно их пересечение $H \cap F$ абсолютно регулярно. Абсолютно регулярные p-группы, а также p-группы порядка, меньшего $p^{n+k+p+1}$, назовем тривиальными R_n^k-группами. Если в определении R_n^k-групп вместо абсолютной регулярности подставить цикличность, то получим I_n^k-группы (см. ([4])). Множество всех R_n^k-групп обозначим R_n^k.

Теорема 6. *Пусть G — нетривиальная R_n^0-группа. Тогда справедливо одно из утверждений:*

1) *$|\Omega_1(G)| = p^p$ и факторгруппа $G|\Omega_1(G)$ циклическая;*
2) *G — группа максимального класса;*
3) *$p = 2$, $n = 1$, $G = \langle a, b \mid a^{2^{n+1}} = b^8 = b^{-4}a^{2^n} = 1, a \cdot a^b = a^{i \cdot 2^n}, i = 0, 1\rangle$.*

Теорема 7. $R_n^1 = R_{n+1}^0$.

Теорема 8. *Пусть G — нетривиальная R_n^2-группа. Тогда справедливо одно из утверждений:*

1) *$n = 1$, $p = 2$; $\Omega_1(G)$ имеет порядок 4 или 8 и лежит в $\Phi(G)$; в первом случае $G|\Omega_1(G)$ метациклическая порядка 16 и экспоненты 4, во втором случае $G|\Omega_1(G)$ — обычная группа кватернионов. В оставшихся четырех случаях $\Omega_1(G)$ имеет порядок p^p;*

2) $G|\Omega_1(G)$ *метациклическая порядка* p^4 *и экспоненты* p^2;

3) $p=3$, $n=1, 2$; $G|\Omega_1(G)$ — *группа максимального класса и порядка* 3^{n+3} *с четырьмя подгруппами порядка* 3; $\Omega_1(G) < \Phi(G)$;

4) $p=2$, $n=1$, $G|\Omega_1(G)$ — R_2^0*-группа порядка* 32 *без циклической подгруппы индекса* 2; G *метациклическая*;

5) $p=2$, $n=2$, $G|\Omega_1(G)$ — *минимальная неметациклическая группа порядка* 32.

Из теоремы 8 легко получается описание I_n^2-групп. Очевидно, в классе 2-групп справедливо равенство $R_n^k = I_n^k$. Поэтому достаточно найти I_n^2-группы нечетного порядка. Оказывается, что последние исчерпываются I_{n+2}^0-группами и метациклическими группами порядка p^6 и экспоненты p^3.

Напомним, что неабелева p-группа называется специальной, если ее центр элементарен и совпадает с коммутантом и подгруппой Фраттини. Специальная p-группа с центром порядка p называется экстраспециальной (о специальных и экстраспециальных p-группах см. § 3.13 книги ([3])).

Теорема 9 обобщает теорему Блэкберна о минимальных неметациклических p-группах.

Теорема 9. *Пусть p-группа G такова, что для любых ее нециклических подгрупп H и F равных порядков имеем $d(H) = d(F)$. Тогда справедливо одно из утверждений:*

1) $|G| < p^5$;

2) *G элементарна*;

3) *все собственные подгруппы группы G метациклические*;

4) *G экстраспециальная порядка* 32;

5) *G специальная порядка* 64 *с центром порядка* 4. *Все максимальные подгруппы группы G минимальные неметациклические и поэтому изоморфны*;

6) *G — 3-группа максимального класса.*

4°. В теории простых групп важные приложения находят p-группы с «малыми» абелевыми нормальными подгруппами. Значение этих групп особенно отчетливо проявилось в последних работах Дж. Томпсона. Первые результаты в этом направлении получили П. Рокетт, описавший все p-группы без нормальных подгрупп типа (p, p) (см. § 3.7 в ([3])), и Н. Блэкберн, описавший все p-группы нечетного порядка без нормальных подгрупп типа (p, p, p) (см. ([2])). Отметим, что до сих пор полностью не классифицированы 2-группы без нормальных подгрупп типа (2, 2, 2). Полезную информацию о таких группах дает

Теорема 10. *Пусть H — нормальная подгруппа 2-группы G, при этом H не содержит G-допустимой подгруппы типа* (2, 2, 2). *Предположим, что H нециклична и не группа максимального класса. Если H содержит G-допустимую абелеву подгруппу A типа* (4, 4), *то централизатор A в H метацикличен. Если же H не содержит такой подгруппы, как A, то H содержит G-допустимую абелеву подгруппу B типа* (4, 2), *и централизатор B в H содержит циклическую подгруппу индекса* 2. *В частности, производная длина группы H не превосходит четырех.*

В ([7]) анонсировано такое обобщение теоремы Блэкберна: в p-группе нечетного порядка число подгрупп типа (p, p, p) равно 0 или сравнимо с 1 по модулю p. Более глубокий результат содержит

Теорема 11. *В p-группе нечетного порядка число элементарных подгрупп порядка p^4 равно* 0 *или сравнимо с* 1 *по модулю p.*

Теорема 11 обобщает цитировавшийся во введении результат Хоби.

5°. В этом параграфе мы сформулируем две теоремы, дающие новые характеризации p-групп максимального класса достаточно больших порядков.

Теорема 12. *Пусть группа G порядка p^m не является группой максимального класса, $p+1 < n < m$. Тогда G содержит кратное p число нормальных делителей D индекса p^n таких, что G/D максимального класса.*

Теорема 13. *Пусть фактор-группа $G/p^2G \cdot K_{p+2}(G)$ максимального класса. Тогда справедливо одно из утверждений:*

1) *подгруппа* pG *циклична и* $|G / pG| \leqslant p^p$;

2) G — *группа максимального класса.*

Заметим, что при доказательстве теоремы 1 автор существенно использовал цитированную во введении теорему Блэкберна, а также построенную Блэкберном теорию p-групп максимального класса. Эти же результаты он использовал в ходе доказательства теорем 2, 12 и 13.

6°. Дж. Альперин ([8]) предположил, что для фиксированного n и достаточно большого p все p-группы G обладают следующим свойством:

($\mathfrak{A}_n$). Если G содержит абелеву подгруппу индекса p^n, то она содержит нормальную абелеву подгруппу того же индекса. В связи с этим предположением интерес представляет следующая

Теорема 14. *Если* $p > 3$, *то существует группа порядка* p^{1+2p}, *не удовлетворяющая* ($\mathfrak{A}_{1/2(p+3)}$). *Существует группа порядка* 3^{10}, *не удовлетворяющая* ($\mathfrak{A}_4$).

В частности, теорему Альперина из ([8]) нельзя улучшить для $p < 7$.

7°. Теорема 15 обобщает основную теорему из ([9]) (см. также лемму в ([7])).

Теорема 15. *Пусть* $A < A_1$ — *абелевы подгруппы одинаковой экспоненты* $p^n > 2$ *в произвольной конечной группе* G. *Тогда между* A *и* G *содержится сравнимое с* 1 *по модулю* p *число абелевых подгрупп экспоненты* p^n *и порядка* $p|A|$.

8°. Теорема 16 полезна при рассмотрении 2-групп с двумя образующими.

Теорема 16. *В неметациклической 2-группе с двумя образующими число максимальных подгрупп с двумя образующими всегда четно.*

Ростовский инженерно-строительный институт

Поступило
4 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Hall, Proc. London Math. Soc., **36**, 468 (1936). [2] N. Blackburn, Proc. London Math. Soc., **11**, 1 (1961). [3] B. Huppert, Endliche Gruppen, I, 1967. [4] Я. Г. Беркович, Сиб. матем. журн., **9**, 6, 1284 (1968). [5] T.-Y. Lam, J. Algebra, **9**, 1, 94 (1968). [6] C. Hobby, Pacific J. Math., **12**, 4, 1343 (1962). [7] Я. Г. Беркович, ДАН, **187**, № 3, 499 (1969). [8] J. L. Alperin, Trans. Am. Math. Soc., **117**, 10 (1965). [9] J. L. Alperin, J. Algebra, **1**, 110 (1964).