Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 2

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

Л. А. АЙЗЕНБЕРГ

ПОЛИНОМЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ГОЛОМОРФНЫМ ФУНКЦИЯМ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ, И АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ РИССОВ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 18 I 1971)

1. Пусть $\mathcal{D}$ — ограниченная область в C^n с кусочно-гладкой границей $\partial\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \ni 0$; $C(\partial\mathcal{D})$ — пространство непрерывных на $\partial\mathcal{D}$ функций, $A(\partial\mathcal{D})$ — подпространство следов на $\partial\mathcal{D}$ голоморфных на $\mathcal{D}$ и непрерывных на $\overline{\mathcal{D}}$ функций $f(z)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$; на $\partial\mathcal{D}$ заданы функции $w_k(z, \bar{z})$, $k = 1, \ldots, n$, класса $C^{(1)}$ такие, что для $z \in \partial\mathcal{D}$

$$w_1(z, \bar{z})z_1 + \ldots + w_n(z, \bar{z})z_n = 1. \qquad (1)$$

Обозначим

$$\omega(z, w) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} w_k dw_1 \wedge \ldots [k] \ldots \wedge dw_n \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n,$$

где $w = (w_1, \ldots, w_n)$, $[k]$ — знак пропуска дифференциала dw_k. Если $\omega(z, w)$ не вырождена на $\partial\mathcal{D}$, то всякую внешнюю дифференциальную форму α степени $2n-1$ с коэффициентами из $C(\partial\mathcal{D})$ можно на $\partial\mathcal{D}$ представить в виде $\alpha = \varphi(z, \bar{z})\omega$, где $\varphi \in C(\partial\mathcal{D})$. И вместо того, чтобы говорить о формах, ортогональных при интегрировании на $\partial\mathcal{D}$ голоморфным функциям, будем говорить о функциях φ, ортогональных голоморфным в том смысле, что

$$\int_{\partial\mathcal{D}} f(z)\varphi(z, \bar{z})\omega(z, w) = 0 \qquad (2)$$

для всех $f \in A(\partial\mathcal{D})$. Подпространство функций $\varphi \in C(\partial\mathcal{D})$, ортогональных $A(\partial\mathcal{D})$ в смысле (2), обозначим $O(\partial\mathcal{D})$.

В некоторых случаях полезно знать описание полиномов $P(z, w)$, входящих в $O(\partial\mathcal{D})$. Заметим, что при $n = 1$ полином $P(z, w)$ и форма $\omega(z, w)$ имеют соответственно вид $P(z, 1/z)$ и dz/z.

Теорема 1. *Для включения $P(z, w) \in O(\partial\mathcal{D})$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_{\substack{\tau_1 \geqslant 0, \ldots, \tau_{n-1} \geqslant 0 \\ \tau_1 + \cdots + \tau_{n-1} \leqslant 1}} P\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\tau_1}{z_1}, \ldots, \frac{\tau_{n-1}}{z_{n-1}}, \frac{1 - \tau_1 - \cdots - \tau_{n-1}}{z_n}\right) d\tau_1 \wedge \cdots$$

$$\cdots \wedge d\tau_{n-1} = \sum_{j=1}^{n} Q_j\left(z_j, z_1, \frac{1}{z_1}, \ldots [j] \ldots, z_n, \frac{1}{z_n}\right),$$

где Q_j — полином, $Q_j(0, z_1, \ldots, 1/z_n) = 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Доказательство опирается на следующую лемму, которая получается из формы Коши — Фантаппье (см. ([1–5])).

Лемма. *Если $f(z)$ голоморфна в $\mathcal{D}$ и непрерывна на $\overline{\mathcal{D}}$, а полином $P(z, w)$ имеет вид*

$$P(z, w) = \sum_{k=1}^{m} a_{\alpha^k, \beta^k} z^{\alpha^k} w^{\beta^k},$$

где $\alpha^k = (\alpha_1^k, \ldots, \alpha_n^k)$, $\beta^k = (\beta_1^k, \ldots, \beta_n^k)$, $z^{\alpha^k} = z_1^{\alpha_1^k} \ldots z_n^{\alpha_n^k}$, $w^{\beta^k} = w_1^{\beta_1^k} \ldots$ $\ldots w_n^{\beta_n^k}$, то

$$\int\limits_{\partial\mathscr{D}} P(z, w) f(z)\,\omega = (2\pi i)^n \sum_{k=1} \left[\frac{\partial^{\beta_1^k+\dots+\beta_n^k}}{\partial z_1^{\beta_1^k} \dots \partial z_n^{\beta_n^k}} \frac{f(z)\, z^{\alpha^k}}{(\beta_1^k + \dots + \beta_n^k + (n-1))!} \right]_{z=0} . \quad (3)$$

С л е д с т в и е. *Всякий полином $P(z, w)$ представим в виде суммы полинома $Q(z, w) \in O(\partial\mathscr{D})$ и полинома $R(w)$, зависящего только от w.*

Отметим включение $A_0(\partial\mathscr{D}) \subset O(\partial\mathscr{D}) \subset C(\partial\mathscr{D})$, где $A_0(\partial\mathscr{D})$ — пространство следов на $\partial\mathscr{D}$ голоморфных в $\mathscr{D}$ и непрерывных на $\overline{\mathscr{D}}$ функций $f(z)$ таких, что $f(0) = 0$. Из теоремы 1 видно, что при $n > 1$ множество $O(\partial\mathscr{D})$ не является кольцом. Подчеркнем, что описание полиномов из $O(\partial\mathscr{D})$ в теореме 1 и разложение из следствия не зависят от конкретного вида области $\mathscr{D}$.

2. Потребуем еще, чтобы было верно утверждение:

$$\text{\textit{полиномы} } P(z, w) \text{ \textit{плотны в пространстве} } C(\partial\mathscr{D}) \quad (4)$$

(в смысле равномерной сходимости на $\partial\mathscr{D}$). И пусть * последовательность областей $\mathscr{D}_m$ с кусочно-гладкими границами $\partial\mathscr{D}_m$ такова, что 1) $\overline{\mathscr{D}}_m \subset \subset \mathscr{D}_{m+1}, \bigcup\limits_m \mathscr{D}_m = \mathscr{D}$; 2) для всякой голоморфной в $\mathscr{D}$ функции $f(z)$

$$\int\limits_{\partial\mathscr{D}_m} |f|\, dv_m \quad (5)$$

не убывает с возрастанием номера m, где dv_m — элемент $(2n-1)$-мерного лебегова объема на $\partial\mathscr{D}_m$; 3) если для $f(z)$ интегралы (5) равномерно ограничены (в этом случае будем писать $f \in H_1$), то $f(z)|_{\partial\mathscr{D}_m}$ слабо сходятся к некоторой суммируемой на $\partial\mathscr{D}$ функции (ее тоже обозначим $f(z)$, $z \in \in \partial\mathscr{D}$) в том смысле, что

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\partial\mathscr{D}_m} |f|\, dv_m \leqslant \int\limits_{\partial\mathscr{D}} |f|\, dv, \qquad \lim_{m\to\infty} \int\limits_{\partial\mathscr{D}_m} f\nu = \int\limits_{\partial\mathscr{D}} f\nu$$

для всякой внешней дифференциальной формы ν степени $2n-1$ с непрерывными на $\overline{\mathscr{D}} \setminus \mathscr{D}_1$ коэффициентами; в частности, для $f(z) \in H_1$ верна формула (3).

Поставим задачу описания мер, ортогональных при интегрировании на $\partial\mathscr{D}$ пространству $O(\partial\mathscr{D})$. В классическом случае при $n = 1$ и $\mathscr{D} = \{z_1\colon |z_1| < 1\}$ имеет место равенство $A_0(\partial\mathscr{D}) = O(\partial\mathscr{D})$, поэтому теорему 2, решающую указанную задачу, можно рассматривать как обобщение классической теоремы Риссов ([6, 7]). Разработан ряд методов, позволяющих получать различные обобщения теоремы Риссов (см., например, ([7-11])), однако они не применимы в нашем случае, как правило, по той причине, что $O(\partial\mathscr{D})$ — не кольцо при $n > 1$.

Т е о р е м а 2. *Пусть μ — комплекснозначная борелевская мера на $\partial\mathscr{D}$. $\int\limits_{\partial\mathscr{D}} \varphi\, d\mu = 0$ для всех $\varphi \in O(\partial\mathscr{D})$ тогда и только тогда, когда существует такая функция $f(z) \in H_1$, что $\mu(E) = \int\limits_E f(z)\,\omega$ для любого борелевского подмножества $E \subset \partial\mathscr{D}$.*

3. Приведем примеры классов областей, для которых выполнены условия п. п. 1, 2.

1°. Пусть $\mathscr{D} = \{z\colon \Phi(z, \bar{z}) < 0\}$ — строго псевдовыпуклая ограниченная область с дважды гладкой границей, $\mathscr{D} \ni 0$, являющаяся еще и линейно выпуклой ([12]), что в данном случае означает, что для всякого $z \in \partial\mathscr{D}$ касательная аналитическая плоскость $\{\zeta\colon (\zeta_1 - z_1)\Phi_{z_1}' + \dots + (\zeta_n - - z_n)\Phi_{z_n}' = 0\}$ не пересекает $\mathscr{D}$. Положим $w_i = \Phi_{z_i}'(z_1\Phi_{z_1}' + \dots$

* В п. 3 указаны классы областей, для которых выполняются требования п.п. 1, 2.

$\ldots + z_n\Phi'_{\bar z_n})^{-1}$, $i = 1, \ldots, n$. При таком выборе w справедливо (1) и форма $\omega(z, w)$ не вырождена на $\partial\mathscr{D}$. Пусть h — многообразие, описываемое точкой (z, w) в C^{2n}, когда z пробегает $\partial\mathscr{D}$. h — гладкое многообразие без комплексных касательных векторов, поэтому ([13]) непрерывные на h функции равномерно аппроксимируются голоморфными. Можно показать еще, что h — полиномиально выпуклый компакт, значит, указанная аппроксимация может быть произведена полиномами $P(z, w)$, поэтому верно (4).

Рассмотрим пучок комплексно-одномерных аналитических плоскостей, проходящих через 0. Каждое сечение $\mathscr{D}$ плоскостью пучка есть односвязная область. Существует гомеоморфизм $\varphi \in C$ ([1]) области $\mathscr{D}$ на единичный шар, при котором сечение $\mathscr{D}$ каждой плоскостью пучка конформно отображается на сечение шара той же плоскостью. Пусть $\mathscr{D}_m$ — прообраз шара радиуса $1 - 1/(m+1)$ при отображении φ, $m = 1, 2, \ldots$ Так построенные области $\mathscr{D}_m$ удовлетворяют условиям 1) и 2) из п. 2. Если $f(z) \in H_1$ в $\mathscr{D}$, то $f(z) \in H_1$ и почти в каждом сечении (сравни ([14])) и функцию $f(z)|_{\partial\mathscr{D}}$ можно построить по сечениям, пользуясь известными граничными свойствами голоморфных функций класса H_1 при $n = 1$ ([6]), при этом условие 3) из п. 2 тоже будет выполнено.

2°. Если класс областей $\mathscr{D}$ тот же, что в 1°, но функции $\Phi(z, \bar z)$ из класса $C^{(n+2)}$, то в силу теоремы 5.4 работы ([15]) свойство (4) верно для полиномов от z, ψ, где $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k)$, ψ_j — функция класса $C^{(n+1)}$, достаточно близкая к w_j в $C^{(2)}$-топологии, $j = 1, \ldots, n$. Остается функции ψ_j выбирать так, чтобы имел место аналог (1) и форма $\omega(z, \psi)$ не вырождалась на $\partial\mathscr{D}$.

3°. Пусть $\mathscr{D}$ — область того же класса, что и в 1°, а $w_j \in C^{(n+1)}$ — как и в 2°. Продолжим w_j как функции класса $C^{(n+1)}$ в некоторую окрестность U границы $\partial\mathscr{D}$ с сохранением свойства (1). Рассмотрим гомеоморфизм $\varphi_t \in C^{(n+1)}$ границы $\partial\mathscr{D}$ на границу $\partial\mathscr{D}_t \subset U$ некоторой области $\mathscr{D}_t$, непрерывно зависящей в $C^{(2)}$-топологии от параметра t, $0 < t < 1$, такой, что $\lim_{t\to 0} \varphi_t$ (в $C^{(2)}$-топологии) есть тождественное отображение $\partial\mathscr{D}$. Применяя вновь теорему 5.4 из ([15]), получаем, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ полиномы $P(z, w)$ обладают свойством (4) на $\partial\mathscr{D}_t$, $0 < t < \varepsilon$. Области $\mathscr{D}_t$ можно было выбирать, чтобы, как и в 1°, их сечения комплексно-одномерными аналитическими плоскостями, проходящими через 0, были односвязны. Для таких $\mathscr{D}_t$, $0 < t < \varepsilon$, выполнены требования п.п. 1, 2.

Итак, функции w_j из 1° годятся не только для областей из 1°, но и для близких к ним в указанном смысле. Например, $w_j = \bar z_j(|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2)^{-1}$, $j = 1, \ldots, n$, для областей, близких к шару $\{z\colon |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 < r\}$.

Результаты данной работы докладывались на научных семинарах (март — ноябрь 1970 г.) в Московском, Ленинградском, Уральском, Ташкентском, Красноярском университетах и в Институте математики СО АН СССР. Автор пользуется случаем поблагодарить участников этих семинаров за полезное обсуждение. Особенно автор благодарен Р. Э. Вальскому, В. П. Гурарию и Г. М. Хенкину за ценные замечания.

Институт физики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Красноярск

Поступило
14 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ж. Лере, Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии, М., 1960. [2] Л. А. Айзенберг, ДАН, 155, № 1 (1964). [3] Л. А. Айзенберг, Тр. Московск. матем. общ., 21 (1970). [4] W. Koppelman, Bull. Am. Math. Soc., 73, № 3 (1967). [5] Г. М. Хенкин, Матем. сборн., 78, № 4 (1969). [6] И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950. [7] К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963. [8] I. Glicksberg, J. Funct. Anal., 1 (1967). [9] H. König, G. L. Seever, Duke Math. J., 36, № 4 (1969). [10] J. Rainwater, Duke Math. J., 36, № 4 (1969). [11] M. Heins, Math. Scand., 20, № 2 (1967). [12] L. A. Aizenberg, Bull. Acad. Pol. Sci., 15, № 7 (1967). [12] L. A. Aizenberg, Bull. Acad. Pol. Sci., 15, № 7 (1967). [13] Е. М. Чирка, Матем. сборн., 78, № 1 (1969). [14] Л. А. Айзенберг, ДАН, 120, № 5 (1958). [15] L. Hörmander, J. Wermer, Math. Scand., 23, № 1 (1968).