Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 2

УДК 519.9 + 62-50 *МАТЕМАТИКА*

В. А. АНДРЕЕВ, Ю. Ф. КАЗАРИНОВ, В. А. ЯКУБОВИЧ

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ МИНИМИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 25 XII 1970)

Рассмотрим систему управления, описываемую дифференциальным уравнением

$$dx / dt = Ax + b\sigma + f(t), \tag{1}$$

где $x = x(t)$ является n-мерным вектором состояния системы, $x(0) = a$, $\sigma = \sigma(x, t)$ — вектор (порядка m) управления системой, A — постоянная матрица порядка $n \times n$, b — постоянная матрица порядка $n \times m$, $f(t)$ — вектор-функция возмущений порядка n. В (1) все матрицы и векторы вещественны. Ниже предполагается, что пара (A, b) управляема, т. е. среди столбцов матриц $b, Ab, \ldots, A^{n-1}b$ есть n линейно независимых, а также, что $|f(t)| \in L_2$. Здесь L_2 — пространство вещественных функций $\xi(\lambda)$ с конечной нормой $\|\xi\|^2 = \int\limits_0^\infty |\xi(t)|^2\, dt$.

Вещественную вектор-функцию $\sigma(x, t)$ будем называть **допустимым управлением**, если уравнение (1), в котором $\sigma = \sigma(x, t)$ при заданном начальном условии $x(0) = a$ имеет решение $x = x(t)$ на $[0, \infty)$ (являющееся абсолютно непрерывной вектор-функцией и удовлетворяющее уравнению (1) почти всюду) такое, что выполнено $|x| \in L_2$, $|\sigma| \in L_2$. Множество допустимых управлений будем обозначать через $\mathfrak{N}_a$. Очевидно, множество $\mathfrak{N}_a$ не пусто.

Пусть $F(x, \sigma)$ — некоторая заданная квадратичная форма векторных переменных x и σ: $F(x, \sigma) = \sigma^*\varkappa\sigma + 2\sigma^* k^* x + x^* K x$ *. Здесь $K = K^*$, k и $\varkappa = \varkappa^*$ — вещественные матрицы порядков $n \times n$, $n \times m$, $m \times m$ соответственно, причем $\varkappa$ — положительно определенная матрица: $\sigma^*\varkappa\sigma > 0$ $\forall \sigma$. Будем предполагать, что критерий качества управления σ определяется функционалом $J(\sigma) = \int\limits_0^\infty F(x, \sigma)\, dt$, где $x = x(t)$ — решение уравнения (1) с начальным условием $x(0) = a$. Из определения множества $\mathfrak{N}_a$ следует, что если $\sigma \in \mathfrak{N}_a$, то функционал $J(\sigma)$ имеет конечное значение и $|x(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Ниже рассматривается задача о минимизации функционала $J(\sigma)$ на множестве $\mathfrak{N}_a$ и об определении в явном виде управления $\sigma(x, t)$, на котором достигается минимум. Для случая $f(t) \equiv 0$ имеется большое число работ, посвященных решению указанной задачи при различных дополнительных специальных предположениях (список литературы имеется в ([1, 2])). Первые результаты принадлежат, по-видимому, А. М. Летову ([3, 4]), Калману ([5]), В. М. Попову ([6]). Для случая $f(t) \equiv 0$ основное отличие результатов настоящей работы от указанных состоит в установлении алгебраической процедуры отыскания оптимального управления (теорема 1),

* Знак * означает транспонирование в случае вещественных матриц и эрмитово сопряжение в случае комплексных матриц и чисел.

которая для векторного управления отличается от известных ранее и, по-видимому, более удобна, а также в большей общности задачи и в установлении частотного критерия, являющегося достаточным и «почти» необходимым для существования $\operatorname{Inf} J(\sigma) \neq -\infty$, $\sigma \in \mathfrak{R}_a$. Это условие автоматически выполняется при тех специальных предположениях, которые делались в указанных работах. Кроме того, в отличие от известных авторам работ по этой тематике, ниже рассмотрен случай $f(t) \not\equiv 0$.

Пусть λ — комплексный параметр. Введем обозначения: $\delta(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$, $A_\lambda^{-1} = (\lambda I_n - A)^{-1}$. Здесь и ниже через I_n обозначается единичная матрица размерности $n \times n$. Распространим квадратичную форму $F(x, \sigma)$ с сохранением эрмитовости на комплексные значения x, σ и определим $m \times m$-матрицы-функции $\Pi(i\omega)$, $\alpha(\lambda)$, $\Omega(\lambda)$ и функцию $\varphi(\lambda)$ равенствами

$$\sigma^* \Pi(i\omega)\sigma = F(A_{i\omega}^{-1} b\sigma, \sigma), \qquad \alpha(\lambda) = \delta(-\lambda)\delta(\lambda)\Pi(\lambda),$$

$$\det \alpha(\lambda) = \varphi(\lambda)[\delta(-\lambda)\delta(\lambda)]^{m-1} \det \varkappa, \qquad \Omega(\lambda) = \Pi(\lambda)^{-1}\varphi(\lambda) \det \varkappa,$$

где σ — произвольный m-вектор, ω — вещественное число, λ — комплексное число. Ниже для кратности будем многочлен называть вещественным, если он имеет вещественные коэффициенты. В ([7]) показано, что $\alpha(\lambda)$ является вещественным матричным многочленом со старшим членом $(-1)^n \varkappa \lambda^{2n}$, а матрица-функция $\Omega(\lambda)$ — вещественным матричным многочленом степени не выше $2n$. Там же показано, что функция $\varphi(\lambda)$ является вещественным многочленом относительно λ^2 со старшим членом $(-1)^n \lambda^{2n}$.

В приводимой теореме 1 без ограничения общности будем предполагать, что многочлен $\delta(\lambda)$ не имеет кратных корней и не существует числа λ_0 такого, что $\delta(-\lambda_0)\varphi(\lambda_0) = \delta(\lambda_0) = 0$. Действительно можно показать, что для системы (1) с любой вещественной управляемой парой (A, b) существует вещественная $n \times m$-матрица g такая, что после замены $\sigma = g^* x + \nu$ получается система вида (1) и форма $F_g(x, \nu) = F(x, g^* x + \nu)$, для которых выполнены указанные выше условия.

Теорема 1. *Пусть при всех вещественных ω выполнено $\varphi(i\omega) \neq 0$ и матрица $\alpha(i\omega)$ неотрицательна: $\sigma^* \alpha(i\omega)\sigma \geqslant 0 \quad \forall \sigma$.*

Тогда для каждого начального вектора $x(0) = a$ существует оптимальное управление $\sigma_0 \in \mathfrak{R}_a$, $J(\sigma_0) = \min J(\sigma)$ $(\sigma \in \mathfrak{R}_a)$. Функция σ_0 не зависит от a и имеет вид

$$\sigma_0 = c^* x - \varkappa^{-1} b^* \int_0^\infty e^{C^*(\tau - t)} H f(\tau)\, d\tau, \tag{2}$$

где c, C, $H = H^*$ — матрицы, которые находятся следующим образом. 1) Определяется вещественный многочлен $\psi(\lambda)$ со старшим членом λ^n из уравнения факторизации $\varphi(\lambda) = \psi(-\lambda)\psi(\lambda)$ при дополнительном условии, что $\psi(\lambda)$ — гурвицев многочлен. Многочлен $\psi(\lambda)$ с указанными свойствами существует и определяется единственным образом. 2) Находится вещественный матричный многочлен $\beta(\lambda)$ из матричного уравнения факторизации $\alpha(\lambda) = \beta(-\lambda^*)^* \varkappa \beta(\lambda)$ при дополнительных условиях: a) старшим членом $\beta(\lambda)$ является $\lambda^n I_m$; b) выполнено соотношение $\det \beta(\lambda) = \delta(\lambda)^{m-1}\psi(\lambda)$, где $\psi(\lambda)$ — многочлен, определенный в пункте 1). Такой многочлен $\beta(\lambda)$ существует и притом единственный. 3) Матрица c находится единственным образом из тождества $\beta(\lambda) = \delta(\lambda)[I_m - c^* A_\lambda^{-1} b]$. 4) Матрица C по матрице c, найденной в пункте 3), определяется формулой $C = A + bc^*$. При этом матрица C будет гурвицевой. 5) Матрица H по матрицам c и C, найденным в пунктах 3) и 4), определяется единственным образом из матричного уравнения $C^* H + HC = -D$, где $D = D^*$ — матрица формы $F(x, c^* x)$.

Доказательство. Пользуясь теоремой 3 из ([8]) можно показать, что существует и притом единственный скалярный многочлен $\psi(\lambda)$ и матричный многочлен $\beta(\lambda)$ такие, как указано в формулировке теоремы.

Пользуясь леммой 1 ([6], § 9), можно показать, что в условиях теоремы существуют постоянная вещественная матрица c такая, что матрица $C = A + bc^*$ является гурвицевой, вещественная постоянная матрица $H = H^*$, вещественная ограниченная по модулю на $[0, \infty)$ вектор-функция $h = h(t)$ и функция $\varphi(t) \in L_2(0, \infty)$, не зависящая от σ и x, для которых почти всюду на $[0, \infty)$ имеет место тождество

$$F(x, \sigma) = (\sigma - \sigma_0(x, t))^* \varkappa (\sigma - \sigma_0(x, t)) - \\ - (Ax + b\sigma + f(t))^* (2Hx + h) - x^* dh / dt + \varphi(t),$$

где $\sigma_0 = \sigma_0(x, t)$ — вектор-функция, определяемая равенством (2), причем $\sigma_0 \in \mathfrak{R}_a$. Кроме того можно показать, что матрицы c, C, $H = H^*$ в формуле (2) могут быть найдены так, как указано в теореме. Пользуясь этим тождеством, легко показать, что вектор-функция $\sigma_0(x, t)$ является синтезированным оптимальным управлением, т. е. оптимальным управлением, не зависящим от начальных условий. Действительно, пусть $\sigma = \sigma(x, t) \in \mathfrak{R}_a$ и $x = x(t)$ — соответствующее ему решение уравнения (1). Тогда легко показать, что $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Интегрируя в указанном выше тождестве левую и правую части от 0 до ∞ и пользуясь тем, что σ, $\sigma_0 \in \mathfrak{R}_a$, H — постоянная матрица и $h(t)$ — вектор-функция, ограниченная по модулю на $[0, \infty)$, получаем

$$J(\sigma) = \int_0^\infty (\sigma(x, t) - \sigma_0(x, t))^* \varkappa (\sigma(x, t) - \sigma_0(x, t))\, dt + \\ + a^* H a + a^* h(0) + \int_0^\infty \varphi(t)\, dt.$$

Из полученного представления для функционала $J(\sigma)$ видно, что он достигает минимума на не зависящем от начальных условий допустимом управлении $\sigma_0(x, t)$, причем не существует другого, не зависящего от начальных условий управления, на котором $J(\sigma)$ достигает минимума. Таким образом, $\sigma_0(x, t)$ является синтезированным оптимальным управлением и притом единственным.

Пусть $\beta(\lambda)$ — некоторый $m \times m$ матричный многочлен. Тогда через $\beta_{\text{пр}}(\lambda)$ будем обозначать присоединенный многочлен: $\beta_{\text{пр}}(\lambda) = \beta(\lambda^{-1}) \det \beta(\lambda)$. Пусть $\beta_1(\lambda)$ и $\beta_2(\lambda)$ — скалярные многочлены. Тогда через $\text{ост}(\beta_1 / \beta_2)$ будем обозначать остаток от деления многочлена $\beta_1(\lambda)$ на $\beta_2(\lambda)$. Если $\beta_1(\lambda) = \|\beta_j^{1h}(\lambda)\|$ — матричный многочлен, а $\beta_2(\lambda)$ — скалярный многочлен, то $\text{ост}(\beta_1 / \beta_2) = \|\text{ост}(\beta_{jh}^{(1)} / \beta_2)\|$. Если $\beta_1(\lambda)$ и $\beta_2(\lambda)$ — взаимно простые многочлены, то будем писать $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle = 1$.

Теорема 2. *Пусть при всех вещественных ω выполнено $\varphi(i\omega) \neq 0$, матрица $\alpha(i\omega)$ неотрицательна ($\alpha(i\omega) \geqslant 0$) и пусть $\langle \delta(-\lambda), \delta(\lambda) \rangle = 1$, $\langle \delta(-\lambda), \psi(\lambda) \rangle = 1$, где $\psi(\lambda)$ — многочлен, определенный в теореме 1.*

Тогда матрица c в формуле оптимального управления (2) однозначно находится из соотношения $c^* r(\lambda) = \rho(\lambda)$, где

$$\rho(\lambda) = \delta(\lambda)\ \text{ост}(\Omega / \psi), \qquad r(\lambda) = \text{ост}\,((\delta A_\lambda^{-1} b \Omega) / (\delta \psi)).$$

Доказательство. Пусть $\beta(\lambda)$ — матричный многочлен, определенный в теореме 1. Из леммы 3 ([7]) следует, что $\beta_{\text{пр}}(\lambda) = \delta(\lambda)^{m-2} q(\lambda)$, где $q(\lambda)$ — некоторый матричный многочлен степени не выше n. Так как существует единственная пара многочленов $\psi(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ таких, как указано в пунктах 1) и 2) теоремы 1, то из сказанного, пользуясь соотношениями пунктов 2) и 3) теоремы 1, получаем, что матрица c в формуле (2) удовлетворяет соотношению $c^* r(\lambda) = \rho(\lambda)$. Предположим, что этому соотношению удовлетворяют матрицы c_1 и c_2, $c_1 \neq c_2$. Тогда $c_0^* [\delta(\lambda) A_\lambda^{-1}] b \Omega(\lambda) = \eta(\lambda) \delta(\lambda) \psi(\lambda)$, где $c_0 = c_1 - c_2$, $\eta(\lambda)$ — некоторый матричный многочаем. Отсюда следует, что функция $\Phi(\lambda) = \sigma^* c_0{}^* A_\lambda^{-1} b \Pi(\lambda)^{-1} b^* (A^*)_{-\lambda}^{-1} c_0 \sigma$, где σ — некоторый m-вектор, может быть представлен в виде

$$\Phi(\lambda) = [\sigma^* \eta(\lambda) b^* \delta(-\lambda)(A^*)_{-\lambda}^{-1}\sigma] / [\delta(-\lambda)\psi(-\lambda)\det \varkappa].$$

В силу гурвицевости многочлена $\psi(\lambda)$ и условий $\langle\delta(-\lambda),\ \delta(\lambda)\rangle = 1$, $\langle\delta(-\lambda),\ \psi(\lambda)\rangle = 1$ функция $\Phi(\lambda)$ не может иметь особенностей, расположенных симметрично относительно мнимой оси. С другой стороны, из вида функции $\Phi(\lambda)$ следует, что если она имеет особенности, то они расположены симметрично относительно мнимой оси. Таким образом, $\Phi(\lambda)$ голоморфна на всей плоскости и, так как $\Phi(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$, то $\Phi(\lambda) \equiv \equiv 0$. Пользуясь управляемостью пары $(A,\ b)$ и произвольностью m-вектора σ из тождества $\Phi(\lambda) \equiv 0$, получаем, что $c_0 = 0$. Таким образом, соотношению $c^* r(\lambda) = \rho(\lambda)$ может удовлетворять только одна матрица c.

Теорема 3. *Если хотя бы для одного вектора s и одного вещественного числа ω имеет место неравенство $s^*\alpha(i\omega)s < 0$, то для любого начального вектора $x(0) = a$ выполнено соотношение* $\operatorname{Inf} J(\sigma) = -\infty\ (\sigma \in \mathfrak{R}_a)$.

Доказательство. Предположим, что ω_0 — вещественное число такое, что $s^*\alpha(i\omega_0)$, $s < 0$, $\delta(i\omega_0) = 0$. Из условий теоремы следует, что такое ω_0 существует. Рассмотрим управление вида $\sigma_T = g^* x + s_0 \eta_T$, где g — вещественная $n \times m$-матрица такая, что матрица $G = A + bg^*$ гурвицева, $s_0 = [I_m - g^* A_{i\omega_0}^{-1} b]s$, η_T — функция, совпадающая с $e^{i\omega_0 t}$ на промежутке $[0,\ T]$ и равная нулю при $t \in (0,\ \infty)$. Легко видеть, что для любого $T \geq 0$ каждые из управлений $\sigma_T{}^{(1)} = \operatorname{Re}\sigma_T$, $\sigma_T{}^{(2)} = \operatorname{Im}\sigma_T$ принадлежит сразу всем множествам $\mathfrak{R}_a$. Рассмотрим функционал $J^0(\sigma) = \int\limits_0^\infty F(x,\ \sigma)\, dt$, где x — решение уравнения $\dot{x} = Ax + b\dot{\sigma} + (1+i)f(t)$ с начальным значением $x(0) = (1+i)a$. Проделав несложные оценки, убеждаемся, что $J^0(\sigma_T) \to -\infty$ при $T \to +\infty$. Тогда, пользуясь очевидным равенством $J^0(\sigma_T) = J(\sigma_T^{(1)}) + J(\sigma_T^{(2)})$, получаем, что имеет место либо $J(\sigma_T^{(1)}) \to \to -\infty$ при $T \to +\infty$, либо $J(\sigma_T^{(2)}) \to -\infty$ при $T \to +\infty$ и, следовательно, $\operatorname{Inf} J(\sigma) = -\infty\ (\sigma \in \mathfrak{R}_a)$.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
17 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Красовский, Теория управления движением, «Наука», 1968. [2] М. Атанс, П. Фалб, Оптимальные управления, 1968. [3] А. М. Летов, Автоматика и телемеханика, 21, № 4, 436 (1960). [4] А. М. Летов, Автоматика и телемеханика, 22, № 4, 425 (1961). [5] R. E. Kalman, J. Basic Eng., 86, 51 (1964). [6] В. М. Попов, Гиперустойчивость автоматических систем, «Наука», 1970. [7] В. А. Якубович, ДАН, 193, № 1 (1970). [8] В. А. Якубович, ДАН, 194, № 3 (1970).