Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 2

УДК 517.9+521.13 **МЕХАНИКА**

М. М. ХАПАЕВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 16 IV 1970)

Обобщение второго метода Ляпунова, предложенное в работах ([1], [2]), позволяет произвести исследование на устойчивость в задаче трех тел.

Уравнения движения в задаче трех тел будем записывать в канонических переменных L, λ, ρ, ω ([3], [4])

$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{\partial F}{\partial L},\quad \frac{dL}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial \lambda},$$
$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \rho},\quad \frac{d\rho}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial \omega}, \tag{1}$$

где $L=m\sqrt{M}\cdot\sqrt{a}$ (a — большая полуось, m — масса планеты, M — масса солнца), $\rho_1=L(1-\sqrt{1-e^2})$ (e — эксцентриситет), $\rho_2=(L-\rho_1)(1-\cos i)$ (i — наклонность), λ — средняя долгота, ω_1 — долгота перигелия, ω_2 — долгота узла. Переменные L_1, λ_1, ρ_1, ω_1, ρ_2, ω_2 относятся к одной планете, L_2, λ_2, ρ_3, ω_3, ρ_4, ω_4 — к другой. $F=F_0+\mu F_1$; $F_0=-M_1(2L_1^2)^{-1}-M_2(2L_2^2)^{-1}$, где M_1 и M_2 — постоянные; μF_1 — возмущающая функция, μ — малый параметр, имеющий смысл отношения массы планеты к массе солнца, массы планет по порядку величины предполагаются одинаковыми,

$$\mu F_1=\sum A\rho_1^{q_1}\rho_2^{q_2}\rho_3^{q_3}\rho_4^{q_4}\cos\left(\sum k_i\lambda_i+\sum p_i\omega_i+h\right). \tag{2}$$

Здесь k_i и p_i — целые числа, по которым производится суммирование. A и h зависят только от L, $2q_i$ — целые положительные числа, причем $2q_i\geqslant|p_i|$.

Свойства возмущающей функции подробно исследуются А. Пуанкаре ([3], [4]), здесь только выпишем интегралы, которые понадобятся в дальнейшем

$$\sum L-\sum\rho=\text{const},$$
$$\rho_2\left(L_1-\rho_1-\frac{\rho_2}{2}\right)=\rho_4\left(L_2-\rho_3-\frac{\rho_4}{2}\right). \tag{3}$$

Коэффициенты ряда (2) обозначим через μh_{kp}, а аргумент cos — через θ. Введем также частоты $n_1(L)=M_1L_1^{-3}$ и $n_2(L)=M_2L_2^{-3}$, предполагая, что $n_1\neq n_2$. Уравнения (1) в таких обозначениях запишутся в виде

$$\frac{d\lambda}{dt}=n+\mu\sum_{k,p}\frac{\partial h_{kp}}{\partial L}\cos\theta,$$
$$\frac{dL}{dt}=\mu\sum_{k,p}h_{kp}k\sin\theta,$$
$$\frac{d\omega}{dt}=\mu\sum_{k,p}\frac{\partial h_{kp}}{\partial\rho}\cos\theta, \tag{4}$$
$$\frac{d\rho}{dt}=\mu\sum_{k,p}h_{kp}p\sin\theta.$$

Переменные L, ρ, ω в уравнениях (4) изменяются медленно — их производные пропорциональны μ, и только две фазы λ изменяются быстро, с частотой $n + O(\mu)$. Обращение в 0 комбинационных частот $k_1 n_1(L) + k_2 n_2(L)$ приводит к появлению в правых частях уравнений (4) медленно изменяющихся слагаемых, т. е. к резонансным явлениям.

Линии, на которых выражение $k_1 n_1(L) + k_2 n_2(L)$ обращается в 0 (резонансные линии), в данном случае являются лучами, выходящими из начала координат на плоскости L

$$L_2/L_1 = \sqrt[3]{M_2/M_1} \cdot \sqrt[3]{-k_2/k_1}. \tag{5}$$

Поскольку функция $F = F_0 + \mu F_1$ есть интеграл движения, интегральная кривая на плоскости L остается вблизи кривой $F_0(L) = F_0(L_0)$.

Для исследования на устойчивость только по переменным L некоторой точки L_0 используем теорему III работы [2], построив возмущенную функцию Ляпунова.

Пусть точка L_0 лежит на некотором резонансном луче (5) при $k = k_0 = \{k_{10}, k_{20}\}$. Задав $\varepsilon > 0$, мы укажем такие $\eta(\varepsilon)$, $T(\varepsilon, \mu)$ и $\mu_0(\varepsilon)$, что решение, по переменным L удовлетворяющее в начальный момент $t = 0$ условию $|L(0) - L_0| < \eta$, для всех $0 < t < T(\varepsilon, \mu)$ и $\mu < \mu_0$ останется в ε-окрестности, т. е. будет выполняться $|L(t) - L_0| < \varepsilon$.

Интегралы (3) позволяют заключить, что при изменении L в пределах $O(\varepsilon)$, переменные ρ испытывают изменения такого же порядка и, малые в начальный момент, ρ остаются малыми при достаточно малом ε для $0 < t < T(\varepsilon, \mu)$, поэтому нет необходимости исследовать на устойчивость по переменным ρ. Существенно, что ряды вида (2) по малым ρ будут быстро сходиться на этом промежутке времени длины T. Из сказанного выше следует, что интегралы (3) определяют некоторое ограничение, зависящее от начальных значений ρ, на величину ε сверху.

Через точку L_0 проходит также кривая $F_0(L) = F_0(L_0)$. Введем новую переменную x, которая отсчитывается от точки L_0 по касательной в этой точке к кривой $F_0(L) = F(L_0)$; направляющий вектор касательной $\mathbf{l}$. Отклонения интегральной кривой по нормали к этому направлению в ε-окрестности будут малыми (порядка $o(\varepsilon)$, μ), так как $F_0 + \mu F_1$ есть интеграл движения; это позволяет исследовать на устойчивость точку L_0 только по одной переменной x; $dx = (\mathbf{l} \cdot \mathbf{dL})$.

В качестве невозмущенной функции Ляпунова выберем $v_0(L) = |x|$ и возмущенную функцию Ляпунова v будем искать в виде

$$v = v_0(L) + \mu v_1(L, \lambda, \rho, \omega, \varepsilon). \tag{6}$$

Продифференцируем v в силу уравнений (4)

$$\dot{v} = \mu \sum_{k,\,p} h_{kp} \cdot (kl) \sin\theta \cdot \operatorname{sgn} x + \mu \frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\left(n + \mu \sum_{k,\,p} \frac{\partial h_{kp}}{\partial L} \cos\theta\right) +$$
$$+ \mu^2 \frac{\partial v_1}{\partial L} \sum_{k,\,p} h_{kp} k \sin\theta + \mu^2 \frac{\partial v_1}{\partial \rho} \sum_{k,\,p} h_{kp}\, p \sin\theta + \mu^2 \frac{\partial v_1}{\partial \omega} \sum_{k,\,p} \frac{\partial h_{kp}}{\partial \rho} \cos\theta. \tag{7}$$

Из ряда $\dot{x} \operatorname{sgn} x = \mu \sum\limits_{k,\,p} h_{kp}\,(kl) \sin\theta \cdot \operatorname{sgn} x$ выделим все члены, резонансные линии которых лежат в 2ε-окрестности точки L_0, и обозначим их сумму через μR_ε. В дальнейшем сумму резонансных членов будем обозначать прямой чертой над знаком суммы, а сумму осцилляционных членов — волнистой. Члены ряда, принадлежащие k_0, отнесем к осцилляционным членам.

Выберем некоторое $\eta > 0$ $(\eta < \varepsilon)$ и $\sigma < {}^1/_2(\varepsilon - \eta)$. Потребуем, чтобы функция v_1 удовлетворяла при $\eta < |x| < \varepsilon$ уравнению

$$\frac{\partial v_1}{\partial \lambda} n = \operatorname{sgn} x \; \widetilde{\sum_{k,\,p}} h_{kp}\,(kl) \sin\theta. \tag{8}$$

Знаменатели (kn), которые появляются при интегрировании, ограничены снизу величинами порядка η или ε. Поэтому функция v_1 при $\eta < |x| < \varepsilon$ ограничена и имеет порядок $(O(\varepsilon, \eta))^{-1} \widetilde{\sum} |h_{kp}|$. Выбором достаточно малого μ_0 можно сделать возмущение μv_1 меньшим $\sigma / 2$ для всех $\mu < \mu_0$. При этом из соотношения (7) с учетом уравнений (4) следует, что $\dot{v} = \mu R_\varepsilon + O(\mu^2)$, и для отрезка времени T, на котором решение, начинающееся в η-окрестности, остается в ε-окрестности, согласно теореме III работы [2] справедлива оценка

$$T \sim \frac{\sigma}{2} \mu^{-1} [R_\varepsilon + O(\mu)]^{-1}.$$

Оценим теперь величину остатка R_ε, которая при фиксированном ε определяется быстротой сходимости ряда (2). Для этого введем единичный вектор $\varkappa = \left\{\frac{k_i}{|k|}\right\}$ и рассмотрим комбинационную частоту $(\varkappa n(L)) \cdot |k|$. В точке L_0 $\varkappa_0 n(L_0) = 0$. На других резонансных линиях $(\varkappa n) = (\varkappa_0 + \Delta\varkappa) \cdot (n_0 + \Delta n) = 0$. На границе 2ε-окрестности $\Delta n = O(\varepsilon)$, следовательно для резонансной линии, лежащей в пределах 2ε-окрестности $\Delta\varkappa \leqslant O(\varepsilon)$. Таким образом, наименьшее k, для которого резонансная линия окажется в 2ε-окрестности, определяется условием $k^{-1} = O(\varepsilon)$ и с уменьшением ε убывает остаток R_ε, содержащий все слагаемые такого рода.

Следует отметить, что в конкретной задаче трех тел параметр μ является малой, но фиксированной величиной, поэтому за счет уменьшения параметра μ нельзя увеличить длину интервала T. Однако это можно сделать за счет малости R_ε. Известно [3, 4], что порядок члена ряда (2) по степеням малых эксцентриситетов и наклонностей, принадлежащего $k = \{k_1, k_2\}$, не ниже $||k_1| - |k_2||$. Предположим, что $R_\varepsilon = o(\mu^2)$ и определим еще одно приближение для функции v. $v = v_0(L) + \mu v_1 + \mu^2 v_2$, где v_1 уже определена выше. Тогда

$$\begin{aligned}\dot{v} = \mu R_\varepsilon + \mu^2 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\frac{\partial F_1}{\partial L} - \mu^2 \frac{\partial v_1}{\partial \rho}\frac{\partial F_1}{\partial \omega} + \mu^2 \frac{\partial v_1}{\partial \omega}\frac{\partial F_1}{\partial \rho} - \mu^2 \frac{\partial v_1}{\partial L}\frac{\partial F_1}{\partial \lambda} + \\ + \mu^2 \frac{\partial v_2}{\partial \lambda}\left(n + \mu \frac{\partial F_1}{\partial L}\right) - \mu^3 \frac{\partial v_2}{\partial \rho}\frac{\partial F_1}{\partial \omega} + \mu^3 \frac{\partial v_2}{\partial \omega}\frac{\partial F_1}{\partial \rho} - \mu^3 \frac{\partial v_2}{\partial L}\frac{\partial F_1}{\partial \lambda}.\end{aligned} \tag{9}$$

Произведем здесь перемножение рядов, содержащих производные функции v_1, выделим резонансные члены указанным выше образом и определим v_2 как решение уравнения

$$\frac{\partial v_2}{\partial \lambda} n = \widetilde{\frac{\partial v_1}{\partial L}} \widetilde{\frac{\partial F_1}{\partial \lambda}} - \widetilde{\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}} \widetilde{\frac{\partial F_1}{\partial L}} + \widetilde{\frac{\partial v_1}{\partial \rho}} \widetilde{\frac{\partial F_1}{\partial \omega}} - \widetilde{\frac{\partial v_1}{\partial \omega}} \widetilde{\frac{\partial F_1}{\partial \rho}}. \tag{10}$$

Тем самым оценка для T становится такой:

$$T(\varepsilon, \mu) \leqslant \frac{\sigma(\varepsilon)}{2(\mu R_\varepsilon + O(\mu^3))}. \tag{11}$$

Построение более высоких приближений в конкретной задаче может оказаться невозможным, так как ε снизу ограничено числом η, которое должно быть настолько большим, чтобы η-окрестность линии резонанса включала начальные условия данной задачи.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
20 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Хапаев, ДАН, 176, № 6 (1967). [2] М. М. Хапаев, ДАН, 193, № 1 (1970). [3] А. Пуанкаре, Лекции по небесной механике, М., 1965. [4] H. Poincare, Les Methodes nouvelles de la Mecanique celeste, I—III, Paris, 1892, 1893, 1899.