Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 4

МАТЕМАТИКА

С. Н. МАНУКЯН

О ВНУТРЕННИХ ТОЧКАХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ КРИВЫХ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 30 VI 1970)

Мы будем использовать обозначения и терминологию из ([1]).

В работе ([1]) были доказаны аналоги некоторых утверждений классической теоремы Жордана, а именно, было доказано, что всякая замкнутая равномерно непрерывная континентная кривая разбивает конструктивное множество всех точек плоскости, не лежащих на данной кривой, на два конструктивно открытых и связных множества, причем одно из них, называемое множеством внешних точек, неограничено, а другое, называемое множеством внутренних точек, ограничено. В ([2]) было доказано, что каждая точка кривой указанного типа является предельной точкой множества ее внешних точек. При этом, однако, не исключался случай вырождения кривой в точку, а потому не исключался случай, когда множество внутренних точек пусто; вопрос о наличии внутренних точек для невырожденных замкнутых кривых в работах ([1,2]) не рассматривался. Тем самым оставался открытым также вопрос о том, обязательно ли невырожденная замкнутая равномерно непрерывная континентная кривая является общей границей множеств ее внутренних и внешних точек. Излагаемые ниже теоремы 1 и 2 дают ответ на эти вопросы и, тем самым, мы получаем конструктивные аналоги всех утверждений классической теоремы Жордана, не рассмотренные в ([1,2]).

Теорема 1. *Пусть K — равномерно непрерывная континентная замкнутая невырожденная кривая. Тогда осуществима точка $x\sigma y$, внутренняя относительно кривой K.*

Теорема 2. *Пусть K — равномерно непрерывная континентная замкнутая невырожденная кривая, определенная на сегменте $\alpha\Delta\beta$. Тогда для всякого $t \in \alpha\Delta\beta$ и для всякого натурального числа n осуществима точка $x\sigma y$, внутренняя относительно K, и такая, что*

$$\rho(x\sigma y, K(t)) < 2^{-n}.$$

Для доказательства теоремы 1 устанавливается, в частности, следующая

Лемма. *Пусть K — равномерно непрерывная континентная замкнутая кривая, определенная на невырожденном сегменте $\alpha\Delta\beta$. Тогда для любого рационального $\eta > 0$ осуществима замкнутая несамопересекающаяся рационально-параметризованная ломаная L с рациональными вершинами, определенная на $\alpha\Delta\beta$, и такая, что:*

(I) $\forall t(t \in \alpha\Delta\beta \supset \rho(K(t), L(t)) < \eta)$;

(II) *для всякой точки $x\sigma y$, η-удаленной от K, оказывается: $x\sigma y$ удалена от L, и скачок на $\alpha\Delta\beta$ всякой угловой функции ломаной L относительно $x\sigma y$ равен скачку на $\alpha\Delta\beta$ всякой угловой функции кривой K относительно $x\sigma y$.*

Идея доказательства теоремы 1. Пусть K — равномерно непрерывная континентная замкнутая невырожденная кривая, заданная на $\alpha\Delta\beta$.

Не нарушая общности, можем считать, что α и β рациональны.

Точки $K(\alpha)$ и $K(\gamma)$, где $\gamma = (\alpha+\beta)/2$, различны в силу невырожденности и континентности кривой K, т. е. имеем $K(\alpha) \neq K(\gamma)$. Для определенности пусть $K^{\eta}(\alpha) < K^{\eta}(\gamma)$. Строим рациональное $\varepsilon > 0$, такое, что $K^{\eta}(\gamma) - K^{\eta}(\alpha) > \varepsilon$. Строим рациональное число d, где $0 < d < \frac{\beta - \alpha}{4}$, таким образом, что

$$\forall t \quad (t \in (\gamma - d)\Delta(\gamma + d) \supset \rho(K(\gamma),\ K(t)) < \varepsilon/8);$$

$$\forall t \quad (t \in \alpha\Delta(\alpha + d) \supset \rho(K(\alpha),\ K(t)) < \varepsilon/8); \tag{1}$$

$$\forall t \quad (t \in (\beta - d)\Delta\beta \supset \rho(K(\beta),\ K(t)) < \varepsilon/8).$$

Пользуясь континентностью K, строим рациональное $\eta > 0$ такое, что

$$\forall t_1 t_2 \quad (t_1 \in (\alpha + d)\Delta(\gamma - d) \& t_2 \in (\gamma + d)\Delta(\beta - d) \supset \supset \rho(K(t_1), K(t_2)) \geqslant \eta). \tag{2}$$

Пользуясь указанной выше леммой, аппроксимируем кривую K ломаной L, заданной на $\alpha\Delta\beta$, так, чтобы неравенства, сходные с (1) и (2), выполнялись также для ломаной L. Обозначим через L_1 и L_2 части ломаной L, определенные соответственно на $(\alpha + d)\Delta(\gamma - d)$ и $(\gamma + d)\Delta(\beta - d)$.

Построим рациональное число b, такое, что

$$L_1^{\eta}(\alpha + d) < b - \varepsilon/4 < b < b + \varepsilon/4 < L_1^{\eta}(\gamma - d);$$

$$L_2^{\eta}(\beta - d) < b - \varepsilon/4 < b < b + \varepsilon/4 < L_2^{\eta}(\gamma + d),$$

и никакая вершина ломаной L не лежит на прямой $y = b$. Тогда всякая точка пересечения этой прямой с ломаной L есть точка ее пересечения с одной из ломаных L_1 или L_2. Таких точек пересечения будет конечное число; составим список всех этих точек пересечения, расположим их в порядке возрастания абсцисс и разобьем на группы, относя две точки пересечения в одну и ту же группу в том и только в том случае, когда обе они лежат на L_1 (или на L_2) и между ними нет точек пересечения прямой $y = b$ с L_2 (соответственно с L_1). Найдем самую левую из таких групп, содержащую нечетное число точек. Наибольшую из абсцисс точек этой группы обозначим через x_1, а наименьшую из абсцисс точек следующей справа группы (нетрудно показать, что таковая имеется) обозначим через x_2. Тогда легко устанавливается, что все точки $x\sigma b$ при $x_1 < x < x_2$ будут внутренними относительно L. Выбирая заранее соответствующим образом степень близости L и K, можно показать, что среди этих точек найдутся также точки, внутренние относительно K.

В интуиционистской математике теорема о существовании внутренних точек жордановых кривых и теорема о границе множества внутренних точек были доказаны в работе Л. Э. Я. Брауэра ([3]). Теорема о границах множества внутренних точек доказывается способом, аналогичным способу Л. Э. Я. Брауэра. Для теоремы же о существовании внутренних точек, возможность перенесения доказательства теоремы Л. Э. Я. Брауэра в конструктивную математику остается неясной. Доказательство теоремы 1 проводится методом, отличным от метода доказательства Л. Э. Я. Брауэра.

Автор приносит глубокую благодарность А. А. Маркову и Б. А. Кушнеру за постановку задачи и внимание к работе.

Вычислительный центр
Академии наук АрмССР и
Ереванского государственного университета

Поступило
18 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Д. Заславский, С. Н. Манукян, Тр. Вычислит. центр АН АрмССР и Ереванск. гос. унив., Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники, в. 5, 26 (1968). [2] С. Н. Манукян, Изв. АН АрмССР, 4, № 2 (1969). [3] L. Brouwer, Intuitionistischer Beweis des Jordanschen Kurvensatzes, Proc. Acad. Amsterdam, 28, 503 (1962); Русский перевод: Л. Э. Я. Брауэр, Тр. Вычислит. центр АрмССР и Ереванск. гос. унив., Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники, в. 5, 139 (1968).