Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 2

УДК 51.01:518.5 *МАТЕМАТИКА*

Я. М. БАРЗДИНЬ

СЛОЖНОСТЬ И ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ КУСКОВ ПРОБЛЕМЫ ВХОЖДЕНИЯ В РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМОЕ МНОЖЕСТВО

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 I 1971)

1°. В работах ([1–3]) и др. был изучен вопрос о сложности начальных кусков проблемы вхождения в рекурсивно перечислимое множество. В частности, в ([1]) было показано, что сложность $K(M, n)$ программ, решающих для первых n натуральных чисел проблему вхождения в рекурсивно перечислимое множество M, удовлетворяет неравенству $K(M, n) \leqslant \log_2 n + C$. В то же время было показано, что эта оценка в общем случае не может быть понижена. С другой стороны, в ([4]) был изучен вопрос о частотном («приближенном») решении начальных кусков проблемы вхождения в рекурсивно перечислимое множество. Было показано, что для любой положительной константы ε существует алгоритм (программа), который решает с частотой $1-\varepsilon$ бесконечно многие начальные куски проблемы вхождения в рекурсивно перечислимое множество M. Этот алгоритм существенно зависел от ε. Сопоставляя упомянутые результаты, мы приходим к следующему вопросу: как зависит минимальная длина программ (т. е. сложность) от частоты (т. е. точности), с которой мы хотим решить начальный кусок проблемы вхождения в рекурсивно перечислимое множество? В настоящей статье приводятся асимптотически точные соотношения, характеризующие эту зависимость. Из этих соотношений, в частности, вытекает следствие, показывающее, что если пренебречь бесконечно малой долей натуральных чисел, то сложность программ, решающих для первых n натуральных чисел проблему вхождения в рекурсивно перечислимое множество, всегда может быть понижена до $\log_2\log_2 n + o(\log_2\log_2 n)$ (в то время как при точном решении (см. теорему 2 из ([1])) эта сложность не ниже $\log_2 n$).

2°. Пусть N — множество натуральных чисел (N_n — множество первых n натуральных чисел), M — произвольное подмножество N ($\chi_M(x)$ — характеристическая функция M) и $\varepsilon(x)$ — функция, отображающая N в интервал $(0, 1)$. Пусть далее, $A(p, x)$ — 2-местная частично рекурсивная (ч.р.) функция и $l(p)$ — длина двоичной записи p.

Положим

$$K_A(M, n, \varepsilon(n)) = \min l(p),$$

где min берется по всем p таким, что

$$|\{x | x \in N_n \,\&\, A(p, x) = \chi_M(x)\}| / n \geqslant 1 - \varepsilon(n).$$

Если такое p не существует, то положим $K_A(M, n, \varepsilon(n)) = \infty$.

Легко убедиться, что существует ч.р. функция $A(p, x)$ (в качестве такой функции можно брать функцию $A(p, x)$ из ([5])) такая, что для любой другой ч.р. функции $\varphi(p, x)$ $K_A(M, n, \varepsilon(n)) \leqslant K_\varphi(M, n, \varepsilon(n)) + C_\varphi$, где C_φ не зависит от M, n и $\varepsilon(n)$. Фиксируем такую функцию $A(p, x)$ (называемую асимптотически оптимальной *), и под сложностью программ, ре-

* В ([1]) дано несколько отличное определение асимптотически оптимальной функции; легко видеть, что оба эти определения эквивалентны.

шающих для первых n натуральных чисел проблему вхождения в множестве M с частотой $1-\varepsilon(n)$, будем понимать величину $K(M,n,\varepsilon(n)) = K_A(M,n,\varepsilon(n))$. Очевидно, если $\varepsilon(n) < 1/n$, то $K(M,n,\varepsilon(n))$ совпадает с $K(M,n)$ (определение $K(M,n)$ см. в ([1])).

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon(x)$ — произвольная вычислимая функция от натурального аргумента, $0 < \varepsilon(x) < 1$, $\varepsilon(x)$ — рациональное число.*

Тогда для любого рекурсивно перечислимого множества M существует бесконечно много натуральных n, при которых *

$$K(M,n,\varepsilon(n)) \leqslant \log_2 \frac{1}{\varepsilon(n)} + O(1).$$

Существует рекурсивно перечислимое множество M такое, что для любой функции $\varepsilon(x)$ от натурального аргумента, $1/x \leqslant \varepsilon(x) < 1$, и любого натурального n

$$K(M,n,\varepsilon(n)) \geqslant \log_2 \frac{1}{\varepsilon(n)} - 2\log_2\log_2 \frac{1}{\varepsilon(n)} - O(1).$$

Доказательство первого утверждения теоремы несложно, оно основано на идее, сходной с той, которая использована при доказательстве теоремы 1 в ([1]). Для доказательства второго утверждения искомое множество M определяется по аналогии с множеством M из доказательства теоремы 2 работы ([1]), только вместо произвольной асимптотически оптимальной функции $A(p,x)$ надо брать специальную асимптотически оптимальную функцию, удовлетворяющую некоторым требованиям «плотности».

Теорема 2. *Пусть $\varepsilon(x)$ — произвольная вычислимая функция от натурального аргумента, $0 < \varepsilon(x) < 1$, $\varepsilon(x)$ — рациональное число.*

Тогда для любого рекурсивно перечислимого множества M и любого натурального n

$$K(M,n,\varepsilon(n)) \leqslant \log_2\log_2 n + 3\log_2 \frac{1}{\varepsilon(n)} + O(1).$$

Существует рекурсивно перечислимое множество M такое, что для любой функции $\varepsilon(x)$ от натурального аргумента, $0 \leqslant \varepsilon(x) \leqslant 1/10$, существует бесконечно много натуральных n, при которых

$$K(M,n,\varepsilon(n)) \geqslant \log_2\log_2 n - O(1).$$

При доказательстве первого утверждения данной теоремы используются такие же соображения, как при доказательстве первого утверждения предыдущей теоремы. Доказательство второго утверждения теоремы является более сложным. В нем, в частности, используется следующая лемма, представляющая также и самостоятельный интерес.

Лемма. *Пусть τ — произвольная вычислимая нумерация 1-местных ч.р. функций.*

Тогда существует рекурсивно перечислимое множество M, обладающее следующим свойством: какое бы натуральное ν мы ни взяли, найдется натуральное n_ν такое, что $2^\nu \leqslant n_\nu < 2^{4\nu}$ и для любой функции $t(x)$, которая при нумерации τ имеет номер не больше ν и определена для $x \leqslant n_\nu$, выполняется неравенство $K^t_{\mathcal{A}}(M,n_\nu) \geqslant {}^1/_2 n_\nu$ (определение $K^t_{\mathcal{A}}(M,n)$ см. в ([1])).

Из леммы, в частности, вытекает следующее утверждение, доказанное М. И. Кановичем и Н. В. Петри ([2]) (только в других терминах): существуют рекурсивно перечислимое множество M и положительная константа c_0 такие, что какую бы общерекурсивную функцию $t(x)$ мы ни взяли, найдется бесконечно много натуральных n, при которых $K^t_{\mathcal{A}}(M,n) \geqslant c_0 n$.

* Высказывание вида «существует бесконечно много натуральных n (для любого натурального n) $K(M,n,\varepsilon(n)) \leqslant \Phi(n) + O(1)$» означает следующее: существует функция $\varphi(n) = \Phi(n) + O(1)$ такая, что для бесконечно многих натуральных n (для всех натуральных n) $K(M,n,\varepsilon(n)) \leqslant \varphi(n)$.

3°. Будем говорить, что множество M' бесконечно мало отличается от множества M, если

$$\frac{|\{x \mid x \in N_n \,\&\, x \in M\Delta M'\}|}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Из теоремы 2 вытекает важное

Следствие. *Для любого рекурсивно перечислимого множества M существует множество M', которое бесконечно мало отличается от M и обладает тем свойством, что для любого натурального n*

$$K(M', n) \leqslant \log_2\log_2 n + o(\log_2\log_2 n).$$

Существует рекурсивно перечислимое множество M такое, что любое множество M', которое бесконечно мало отличается от M, обладает тем свойством, что для бесконечно многих натуральных n

$$K(M', n) \geqslant \log_2\log_2 n - O(1).$$

Вычислительный центр
Латвийского государственного университета
им. П. Стучки
Рига

Поступило
23 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. М. Бардинь, ДАН, 182, № 6, 1249 (1968). [2] М. И. Канович, Н. В. Петри, ДАН, 184, № 6, 1275 (1969). [3] Н. В. Петри, ДАН, 186, № 1, 30 (1969). [4] Я. М. Бардинь, ДАН, 191, № 5, 967 (1970). [5] А. Н. Колмогоров, Проблемы передачи информации, 1, № 1, 3 (1965).