Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 2

УДК 519.3+62.50 **МАТЕМАТИКА**

В. А. ЯКУБОВИЧ

О СИНТЕЗЕ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С КВАДРАТИЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ ПЛАТЕЖА

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 20 IV 1970)

1°. Через R_k ниже обозначается k-мерное эвклидово пространство. Предположим, что состояния x и y и управления u_1 и u_2 двух игроков в фиксированный момент времени описываются векторами $x \in R_{n_1}$, $u_1 \in R_{m_1}$ для первого игрока и векторами $y \in R_{n_2}$, $u_2 \in R_{m_2}$ для второго игрока и что уравнение изменения во времени состояний игроков имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = Az + bu, \quad \text{где } z = \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\|, \; u = \left\| \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \right\|. \tag{1}$$

Здесь A, b — постоянные вещественные матрицы порядков $n \times n$ и $n \times m$, где $n = n_1 + n_2$, $m = m_1 + m_2$. Ниже предполагается, что система (1) управляема, т. е. что ранг $n \times mn$-матрицы $\|b, Ab, \ldots, A^{n-1}b\|$ равен n. Пусть $z_0 \in R_n$ — заданный вектор. Будем называть функции $u_1 = u_1(z, t)$, $u_2 = u_2(z, t)$ *допустимыми управлениями*, если на $(0, \infty)$ существует абсолютно непрерывная функция $z(t)$ (называемая соответствующим решением), удовлетворяющая почти всюду уравнению (1), в котором $u_j = u_j[z(t), t]$, и такая, что (I) $z(0) = z_0$, (II) $|z(t)| \in L(0, \infty)$, (III) $|u[z(t), t]| \in L_2(0, \infty)$.

Пусть $\mathfrak{F}(z, u)$ — вещественная квадратичная форма своих аргументов, причем $\mathfrak{F}(0, u) = u_1^*\gamma_1 u_1 - u_2^*\gamma u_2$, где $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ — матрицы порядков $n_1 \times n_1$ и $n_2 \times n_2$ *. Предположим, что первый игрок стремится минимизировать, а второй игрок — максимизировать функционал

$$J(u_1, u_2) = \int_0^\infty F\{z(t), u[z(t), t]\}\, dt, \tag{2}$$

где z — соответствующее решение **. (Для допустимых u_1, u_2 интеграл (2), очевидно, сходится.) Допустимые управления u_1^0, u_2^0 называются *оптимальными*, если для любых управлений u_1, u_2 таких, что пары (u_1^0, u_2), (u_1, u_2^0) допустимы, выполнено ***

$$J(u_1^0, u_2) \leqslant J(u_1^0, u_2^0) \leqslant J(u_1, u_2^0).$$

---

* Здесь и ниже запись $C > 0$ ($C \geqslant 0$), где C — матрица порядка $k \times k$, означает, что для любого вектора $w \neq 0$ порядка k выполнено $w^*Cw > 0$ ($w^*Cw \geqslant 0$). Звездочка означает эрмитово сопряжение (в частности, транспонирование в случае вещественных векторов и матриц и комплексное сопряжение в случае чисел). Через I_k ниже обозначается единичная $k \times k$-матрица.

** Практический интерес представляет случай, когда $\mathfrak{F}(z, u) = (x - y)^*G(x - y) + u_1^*\gamma_1 u_1 - u_2^*\gamma_2 u$, где $G \geqslant 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$. В этом случае, говоря образно, но неточно, первый игрок стремится минимизировать, а второй — максимизировать квадратичное уклонение между ними, причем одновременно оба игрока стремятся минимизировать затраты на управление.

*** Подчеркнем, что в силу введенных определений значения управления u_1^0 в фиксированный момент времени в парах (u_1^0, u_2) и (u_1^0, u_2^0), вообще говоря, различны. (Аналогичное утверждение справедливо, конечно, и для u_2^0.) Поэтому рассматривается задача, в отличие от аналогичных задач оптимального управления, неравносильна задаче, в которой допустимыми и оптимальными управлениями являются функции одного времени.

Ниже устанавливается достаточное условие существования оптимальных управлений u_1^0, u_2^0 и приводится алгоритм построения u_1^0, u_2^0. (Функции u_1^0, u_2^0 оказываются линейными функциями z.)

Пусть λ — комплексная, ω — вещественная переменные и $B(\lambda)$ — некоторый матричный или скалярный многочлен $B(\lambda) = B_0\lambda^N + \ldots + B_N$. Через $B(\lambda)^\nabla$ будем обозначать многочлен $B(\lambda)^\nabla = [B(-\lambda^*)]^* = B_0^*(-\lambda)^N + \ldots + B_N^*$. Пусть $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$ — скалярные многочлены. Через ост(β / α) ниже обозначается остаток, полученный от деления $\beta(\lambda)$ на $\alpha(\lambda)$. Если $B(\lambda) = \|\beta_{jk}(\lambda)\|$ — матричный многочлен, то ост $(B/\alpha) = \|$ост$(\beta_{jk}/\alpha)\|$. Через $\langle\alpha, \beta\rangle$ обозначается общий наибольший делитель многочленов $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ и через $\langle\alpha, B\rangle$ — общий наибольший делитель многочленов $\alpha(\lambda)$ и всех $\beta_{jk}(\lambda)$.

Распространим с сохранением эрмитовости форму $\mathfrak{F}$ на комплексные значения аргументов x, u и введем обозначения

$$A_\lambda = \lambda I_n - A, \quad \delta(\lambda) = \det A_\lambda, \quad Q(\lambda) = \delta(\lambda) A_\lambda^{-1}, \quad \Gamma = \begin{Vmatrix} \gamma_1; & 0 \\ 0; & -\gamma_2 \end{Vmatrix},$$

$$\mathfrak{F}(A_{i\omega}^{-1} bu, u) = u^* \Pi(i\omega) u, \ \Phi(i\omega) = |\delta(i\omega)|^2 \Pi(i\omega). \tag{3}$$

Здесь $\Pi(i\omega) = \Pi(i\omega)^*$ — матрица порядка m эрмитовой формы $\mathfrak{F}(A_{i\omega}{}^{-1}bu, u)$. В работе ([1]) установлены следующие предложения:

Лемма. *$\Phi(\lambda)$ является многочленом со старшим членом $(-1)^n\lambda^{2n}\Gamma$, $\det \Phi = \delta^{m-1}(\delta^\nabla)^{m-1} \det \Gamma\varphi$, $\Phi^{-1} = \Omega / (\delta\delta^\nabla\varphi)$, где φ и Ω — скалярный и матричный многочлены, $\varphi = \varphi^\nabla$, $\Omega = \Omega^\nabla$, $\varphi(\lambda) = \lambda^{2n}(-1)^n[1 + O(\lambda^{-1})]$, $\lambda \to \infty$.*

Теорема 1. *Предположим, что* а) $\langle\delta, \delta^\nabla\rangle = 1$, $\langle\varphi, \delta\delta^\nabla\rangle = 1$, $\langle\varphi, \Omega\rangle = 1$, б) $\varphi(i\omega) \neq 0$, $\forall\omega$ *и, следовательно, $\varphi(\lambda)$ допускает факторизацию $\varphi(\lambda) = \psi(\lambda) \cdot \psi(\lambda)^\nabla$, где $\psi(\lambda)$ — гурвицев многочлен* *, в) *существует $n \times m$ матрица h, удовлетворяющая тождеству*

$$h^* q(\lambda) = \delta(\lambda) \Omega_0(\lambda), \quad \forall\lambda, \ \text{где} \ q(\lambda) = \text{ос}_\tau\left(\frac{Qb\Omega}{\psi\delta}\right), \quad \Omega_0 = \text{ос}_\tau\left(\frac{\Omega}{\psi}\right), \tag{4}$$

(которое после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях λ переходит в систему линейных уравнений относительно элементов матрицы h), или, что равносильно (4), такая, что матрица $(I_m - h^* A_\lambda{}^{-1} b) \times \Omega(\lambda) / \psi(\lambda)$ является многочленом. Тогда для каждого $z(0) = z_0$ оптимальные управления u_1^0, u_2^0 существуют и имеют вид $u_1^0 = h_1^* z$, $u_2^0 = h_2^* z$, где h_1, h_2 — постоянные матрицы порядков $n \times m_1$, $n \times m_2$, составленные из первых m_1 и последних m_2 столбцов матрицы h: $h = \|h_1, h_2\|$. Матрица $K = A + bh$ «синтезированной» системы является гурвицей и $\det(\lambda I_n - K) = \psi(\lambda)$. Функционал платежа для оптимальных управлений имеет вид $J(u_1^0, u_2^0) = -z_0^* H z_0$, где $H = H^*$. Матрица H определяется из уравнения $A^* H + HA = F_0 - h\Gamma h^*$, где $F_0 = F_0^*$ — матрица формы $\mathfrak{F}(x, 0)$.

Замечания. 1. Можно показать, что матричный многочлен $Qb\Omega$ делится на δ, т. е. что $q(\lambda) = \delta(\lambda) q_0(\lambda)$, где $q_0(\lambda)$ — многочлен. Поэтому тождество (4) преобразуется к виду $h^* q_0(\lambda) = \Omega_0(\lambda)$.

2. Делая в системе (1) замену $u = v + a^* x$, где a — некоторая $n \times m$-постоянная матрица, новую систему $dx / dt = A_1 x + bv$, где $A_1 = A + ba^*$ и новую форму $\mathfrak{F}_1(x, v) = \mathfrak{F}(x, u)$. Можно показать, что при любом выборе матрицы a новый многочлен $\varphi(\lambda)$ совпадает со старым, а также что при подходящем выборе матрицы a для новой системы будут выполнены условия $\langle\delta, \delta^\nabla\rangle = 1$, $\langle\varphi, \delta\delta^\nabla\rangle = 1$, $\langle\varphi, \Omega\rangle = 1$. Можно показать также, что при выполнении условия $\varphi(i\omega) \neq 0$ для новой системы найдется матрица

* Последнее означает, что корни многочлена $\psi(\lambda)$ расположены в открытой левой полуплоскости. Матрица K ниже называется гурвицевой, если $\det(\lambda I_n - K)$ — гурвицев многочлен.

h, удовлетворяющая тождеству (4) *. Таким образом, достаточным условием существования оптимальных управлений является одно условие $\varphi(i\omega) \neq 0$, $\forall\omega$. Оптимальные управления u_1^0, u_2^0 по-прежнему имеют вид $u_1^0 = h_1^* z$, $u_2^0 = h_2^* z$. Матрицы h_1, h_2 находятся посредством указанной замены и применения процедуры, указанной в теореме 1. Эта процедура сводится к определению гурвицева многочлена $\psi(\lambda)$ из уравнения факторизации $\varphi = \psi\psi^\nabla$ (который находится, очевидно, единственным образом) и к решению системы линейных уравнений, получаемых из тождества (4) или из тождества $h^* q_0(\lambda) = \Omega_0(\lambda)$, $\forall\lambda$.

3. Пусть $m_1 = m_2 = 1$ и $\varphi(i\omega)$ меняет знак. Можно показать, что среди допустимых управлений $u_1 = h_1^* z$, $u_2 = h^* z$ с постоянными матрицами h_1, h_2 не существует оптимальных. Более того, для любых допустимых $u_1^0 = h_1^* z$, $u_2^0 = h_2^* z$ существует либо последовательность $u_1^{(k)}$ такая, что пары $(u_1^{(k)}, u_2^0)$ допустимы и $J(u_1^{(k)}, u_2^0) \to -\infty$, либо последовательность $u_2^{(k)}$ такая, что пары $(u_1^0, u_2^{(k)})$ допустимы и $J(u_1^{(k)}, u_2^0) \to +\infty$, и это выполнено для любого z_0.

2°. Доказательство теоремы 1 основано на следующем алгебраическом предложении. Рассмотрим систему (1) с комплексными, вообще говоря, A и b и эрмитову форму $\mathfrak{F}(z, u)$. Система (1) по-прежнему предполагается управляемой. Пусть $\mathfrak{F}(0, u) = u^* \Gamma u$, где $\Gamma = \Gamma^*$, $\det \Gamma \neq 0$. Введем обозначения (3) (исключая обозначение для Γ). Из ([1]) следует справедливость леммы и для этого более общего случая комплексных коэффициентов.

Теорема 2. I. *Предположим, что существует $n \times n$-матрица $H = H^*$ и $n \times m$-матрица h такие, что справедливо представление*

$$\mathfrak{F}(z, u) = d(z^* H z) / dt + (u - h^* z)^* \Gamma (u - h^* z), \qquad \forall z, u, \tag{5}$$

где производная взята в силу системы (I), *т. е.* $d(z^* H z)/dt = 2\mathrm{Re}[z^* H \times \times (Az + bu)]$ *и что, кроме того, матрица $K = A + bh^*$ является гурвицевой. Тогда:* а) *многочлен* $\varphi(\lambda)$ *допускает факторизацию* $\varphi(\lambda) = \psi(\lambda)\psi(\lambda)^\nabla$, *где* $\psi(\lambda) = \det(\lambda I_n - K)$ *и, следовательно,* $\varphi(i\omega) \neq 0$, $\forall\omega$; б) *выполнено* (4), *где* $\psi(\lambda) = \det(\lambda I_n - K)$.

II. *Пусть выполнены условия* а), б), в) *теоремы* 1 *и, в частности,* $\psi(\lambda)$ *и* h *определены согласно* б) *и* в). *Пусть $F_0 = F_0^*$ — матрица эрмитовой формы* $\mathfrak{F}(z, 0)$ *и $H = H^*$ — матрица, определяемая из линейной системы* $A^* H + HA = F_0 - h\Gamma h^*$. *Тогда выполнено тождество* (5) *и* $\psi(\lambda) = \det(\lambda I_n - K)$, *где* $K = A + bh^*$.

Доказательство теоремы 2. Все утверждения теоремы 2 следуют из ([1]), за исключением соотношения $\psi(\lambda) = \det(\lambda I_n - K)$ в разделе II. Обозначим $\Psi = (I_m - h^* A_\lambda^{-1} b)\delta = \delta I_m - h^* Q b$, $\det(\lambda I_n - K) = \varkappa(\lambda)$ и покажем, что $\varkappa(\lambda) = \psi(\lambda)$. По лемме 3([1]) любой минор $m - 1$ порядка матричного многочлена Ψ делится на δ^{m-2}. Следовательно, $\Psi^{-1} \det \Psi = \delta^{m-2} Z$, где Z — матричный многочлен. По следствию к лемме 2 ([1])

$$\varkappa(\lambda) = \delta(\lambda) \det(I_m - h^* A_\lambda^{-1} b) = \det(\Psi / \delta), \qquad \det \Psi = \delta^{m-1}\varkappa.$$

Поэтому $\Psi^{-1} = Z / \delta\varkappa$. По условию $(I_m - h^* A_\lambda^{-1} b)\Omega / \psi = \Psi\Omega / \delta\psi = Z_0$ — многочлен. Следовательно, $\Omega = \Psi^{-1} Z_0 \delta\psi = Z Z_0 \psi / \varkappa$. Так как $\langle \varphi, \Omega \rangle = 1$, то $\langle \psi, \Omega \rangle = 1$, а значит $\varkappa$ делится на ψ. Поскольку $\varphi = \psi\psi^\nabla$, $\varphi = (-1)^n \times \times \lambda^{2n}[1 + O(\lambda^{-1})]$, то $\psi = \lambda^n [1 + O(\lambda^{-1})]$, $\lambda \to \infty$. Из совпадения старших членов у $\varkappa$ и ψ следует, что $\varkappa \equiv \psi$.

3°. Доказательство теоремы 1. Из теоремы 2, II следует, что справедливо представление (5). Пусть $h = \|h_1, h_2\|$, где h_j — матрицы порядков $b \times m_j$. Положим $u_1^0 = h_1^* z$, $u_2^0 = h_2^* z$. Управления u_1^0, u_2^0 допустимы, так как K — гурвицева матрица. Пусть $u_1 = u_1(z, t)$, $u_2 = u_2(z, t)$ —

* Известное автору доказательство этого предложения весьма сложно; предварительно выясняются условия представления матричного многочлена $B(\lambda) = B(\lambda)^\nabla$ в виде $B(\lambda) = X(\lambda)^\nabla C X(\lambda)$, где $C = C^* = \mathrm{const}$, а $X(\lambda)$ — матричный многочлен.

допустимые управления. Подставляя эти значения в (5), используя специальный вид матрицы Г (см. (3)) и интегрируя от $t=0$ до $t=\infty$, получим

$$J(u_1, u_2) = -z_0^* H z_0 + \int_0^\infty (u_1 - h_1^* z)^* \gamma_1 (u_1 - h_1^* z)\, dt -$$

$$- \int_0^\infty (u_2^* - h_2^* z)^* \gamma_2 (u_2 - h_2^* z)\, dt. \qquad (6)$$

Из (6) и предположения $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ сразу следует, что выполнено $J(u_1^0, u_2) \leqslant J(u_1^0, u_2^0) \leqslant J(u_1, u_2^0)$ для любых u_1, u_2, таких, что пары (u_1^0, u_2), (u_1, u_2^0) допустимы. Правило определения $J(u_1^0, u_2^0) = -z_0^* Hz$ следует из теоремы 2, II.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
9 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Якубович, ДАН, 193, № 1 (1970).