Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 4

УДК 519.21 МАТЕМАТИКА

О. А. ОРЕВКОВА

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 1 VII 1970)

1. Пусть $\xi(t)$, $t \in R^n$,— однородное случайное поле со спектральной плотностью $f(x)$, $x \in R^n$, так что $\int\limits_{R^n} f(x)\,dx < \infty$. Пусть $M \subset R^n$ — некоторое ограниченное выпуклое множество значений временного параметра $t \in R^n$. Обозначим $H(M)$ замкнутую в среднеквадратичном линейную оболочку случайных величин $\xi(t)$ таких, что $t \in M$. $H(M)$ — подпространство гильбертова пространства $H(R^n)$ со скалярным произведением $\langle \xi, \eta \rangle = E\xi\bar{\eta}$. С подпространством $H(M)$ связаны следующие вопросы:

1. Какова аналитическая структура $H(M)$?

2. Как аналитически выразить линейную оценку $\hat{\xi}_M(t)$ значения поля в точке $t \overline{\in} M$ через значения поля на множестве M, такую, что математическое ожидание $E|\xi(t) - \hat{\xi}_M(t)|^2$ минимально?

В 1954 г. М. Г. Крейн [1] решил полностью задачу экстраполяции однородных случайных процессов $(n = 1)$. Кроме ответов на вопросы 1 и 2, М. Г. Крейн дал критерий того, что $H([-a, a]) = H(R^1)$ при некотором a, $0 < a < +\infty$.

В работе Левинсона и Мак-Кина [2] решается, в частности задача об аналитической структуре $H([-a, a])$, $0 < a < +\infty$, но при ограничениях на спектральную плотность $f(x)$, которых нет в работе М. Г. Крейна (работа М. Г. Крейна [1], по-видимому, осталась неизвестной авторам статьи [2]).

Здесь вопросы 1 и 2 решаются для некоторых определенных ниже классов случайных полей.

2. При изучении структуры $H(M)$ будем пользоваться тем, что существует изометрическое соответствие между пространством $H(R^n)$ и пространством $L^2(R^n, f)$ функций, суммируемых в квадрате с весом $f(x)$ [3]. При таком соответствии подпространству $H(M)$ отвечает подпространство $L^2(M, f)$, которое является, замыканием в $L^2(R^n, f)$ линейной оболочки множества функций $\exp i(x, t)$ таких, что $t \in M$. Здесь $(x, t) = x_1t_1 + \ldots + x_nt_n$. Таким образом, изучение структуры подпространства $H(M)$ сводится к изучению $L^2(M, f)$, а нахождение наилучшей линейной оценки $\hat{\xi}_M(t)$ сводится к задаче об аналитическом выражении ортогональной проекции $(P_M{}^t\psi)(x)$ любой функции $\psi(x)$ из $L^2(R^n, f)$ на подпространство $L^2(M, f)$. Определим множество A_u, $u \in [0, +\infty)$: точка $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ принадлежит A_u, если $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant u^2$, и найдутся n целых чисел $m_1, \ldots, m_n$ (свои для каждого x) такие, что $|x_j - m_j| \leqslant 1/2 - 1/m_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть спектральная плотность поля $f(x)$ удовлетворяет одному из условий:

А) Будем говорить, что функция $f(x)$, $x \in R^n$, удовлетворяет условию А), если найдутся множество A_u и монотонно убывающая по $s \in [0, +\infty)$ фукция $g(s)$ такая, что

1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln g(s)}{1+s^2}\,ds > -\infty;$

2. если $x \in A_n$, то $g(|x|) \leqslant f(x)$.

Б) Будем говорить, что функция $f(x)$, $x \in R^n$, удовлетворяет условию Б), если найдутся множество A_n, и функция $h(s)$, $s \in [0, +\infty)$, такая, что

1. $h(s)$ непрерывна;

2. $\exists c > 0$ такое, что для любых $s_1, s_2 \in [0, +\infty)$.

$$h(s_1 + s_2) \geqslant ch(s_1) h(s_2);$$

3. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln h(s)}{1+s^2} ds > -\infty$;

4. если $x \in A_n$, то $h(|x|) \leqslant f(x)$.

Ниже понадобятся некоторые понятия, заимствованные из статьи Планшереля и Полиа ([4]).

1°. Направлением в R^n называется набор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_n$ — вещественные числа такие, что $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1$.

2°. Пусть $\varphi(z)$, $z \in C^n$,— произвольная фиксированная целая аналитическая функция. P-индикатором функции $\varphi(z)$ называется функция $h_\varphi(\alpha) = \sup\limits_{x \in R^n} h_\varphi(\alpha, x)$, где $h_\varphi(\alpha, x)$ определяется для любого фиксированного $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и направления $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ по формуле

$$h_\varphi(\alpha, x) = \overline{\lim_{r \to \infty}}\, r^{-1} \log |\varphi(x_1 - i\alpha_1 r, \ldots, x_n - i\alpha_n r)|.$$

3°. Пусть $M \subset R^n$ — некоторое выпуклое множество, α — произвольное направление. Опорной функцией множества M называется функция

$$\chi_M(\alpha) = \sup_{y \in M} (\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n).$$

Обозначим через L_f^{*M} множество целых аналитических функций конечной степени $\varphi(z)$, $z \in C^n$, таких, что $\int\limits_{R^n} |\varphi(x)|^2 f(x)\, dx < \infty$, и P-индикатор функции $\varphi(z)$ совпадает с опорной функцией $\chi_{M_\varphi}(\alpha)$ некоторого выпуклого множества $M_\varphi \subseteq M$.

3. Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$, $x \in R^n$ удовлетворяет одному из условий* А), Б). *Тогда* $L^2(M, f) = L_f^{*M}$.

В ходе доказательства теоремы применяются результаты Планшереля и Полиа ([4]) о строении $L^2(M, 1)$ — пространства целых аналитических функций $\varphi(z)$, $z \in C^n$ таких, что

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_M e^{i(t,x)} \tilde{\varphi}(t)\, dt, \text{ где } \int\limits_M |\tilde{\varphi}(t)|^2 dt < \infty.$$

Кроме того, используется функция С. Н. Бернштейна (([5]), стр. 376), а также теорема 4 из статьи ([6]). Теорема 1 обобщает результаты, сформулированные в статье автора ([8]).

Теорема 2. *Пусть спектральная плотность $f(x)$ удовлетворяет одному из условий* А), Б). *Тогда для любого $\psi(x) \in L^2(R^n, f)$ его проекция $(P_M^f \psi)(x)$ на подпространство $L^2(M, f)$ находится по формуле*

$$(P_M^f \psi)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\psi_j \varphi_i)_f}{\lambda_i} \varphi_i(x),$$

где $(\cdot, \cdot)_f$ — скалярное произведение в $L^2(R^n, f)$; $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ — собственные числа, а $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — соответствующие им собственные векторы оператора $A_M^f: L^2(M, 1) \to L^2(M, 1)$, который определяется равенством $(A_M^f g_1, g_2)_1 = (g_1, g_2)_f$.

Оператор A_M^f рассматривал В. Я. Лин в работе ([7]) из его результатов следует, что в наших условиях A_M^f — вполне непрерывный оператор и множество его собственных функций образует полную ортонормированную систему в $L^2(M, 1)$, причем если φ_i, φ_j элементы этой системы $(i \neq j)$, то

$$\int\limits_{R^n} \varphi_i(x)\overline{\varphi}_j(x) f(x)\,dx = 0.$$

При доказательстве теоремы 2 используется

Лемма. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет одному из условий* А), Б). *Тогда, если система функций $\{\varphi_i(x)\}$ полна в $L^2(M, 1)$, то она полна в $L^2(M, f)$.*

Замечание. Из теоремы 1 следует, что если функция удовлетворяет условию А) или Б), то $L^2(M, f) \neq L^2(R^n, f)$, каково бы ни было ограниченное множество M. Однако, условия А) и Б) являются только достаточными, но не необходимыми. Условие $L^2(M, f) \neq L^2(R^n, f)$ равносильно условию $H(M) \neq H(R^n)$. Оно означает, что значение поля в точке $t \overline{\in} M$ нельзя точно восстановить по его значениям на множестве M.

Теорема 3. *Пусть спектральная плотность $f(x)$ такова, что функция $\Delta(r) = \sup\limits_{|x|^2 > r^2} f(x)$ обладает свойствами:*

1. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\ln \Delta(r)}{1+r^2}\,dr = -\infty;$

2. *существует $c > 0$ такое, что для любых, r_1, $r_2 > 0$*

$$\Delta(r_1)\Delta(r_2) \geqslant c\Delta(r_1 + r_2).$$

Тогда, каково бы ни было ограниченное выпуклое множество M, содержащее окрестность точки $t = 0$, выполняется равенство

$$L^2(M, f) = L^2(R^n, f).$$

В заключение приношу глубокую благодарность И. А. Ибрагимову за постановку задачи и помощь в работе.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
5 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, ДАН, 94, № 1 (1954). [2] M. Levinson, H. P. McKean jr., Acta Math., 112, L—2 (1964). [3] И. М. Гельфанд, Н. Я Виленкин, Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961. [4] M. Plancherel, G. Pólya, Comment. Math. Helv., 9, 224 (1937); 10, 110 (1937). [5] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, М., 1965. [6] В. Я. Лин, Математич. сборн., 67 (109), 4 (1965). [7] В. Я. Лин, Математич. заметки, 6, в. 2 (1969). [8] О. А. Преснякова, ДАН, 192, № 2 (1970).