

К. К. ГЛУХАРЕВ, К. В. ФРОЛОВ

К ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОГРАНИЧЕННОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ

(Представлено академиком И. И. Артоболевским 15 I 1971)

Колебания в системах с ограниченной мощностью источников энергии, поддерживающих эти колебания, обычно рассматривались в случаях, когда источники энергии совмещают в себе функции формирования амплитуды и частоты колебательного процесса (¹⁻³). Так, например, при инерционном возбуждении внешняя (относительно осциллятора) сила пропорциональна некоторому количеству $\varphi^2 \sin \varphi$, где φ и $\dot{\varphi}$ суть координата и ее скорость, соответствующие вращению несбалансированного ротора электродвигателя. Здесь одна и та же координата φ формирует как амплитуду, так и частоту колебаний.

Следует подчеркнуть, что поскольку колебательный процесс характеризуется в основном двумя параметрами — амплитудой и частотой, в самом колебании потенциально заложена возможность раздельного управления процессом как по амплитуде, так и по частоте. Поэтому возбудители колебаний, построенные на таком принципе, должны содержать два источника энергии, которые можно назвать в соответствии с выполняемыми ими функциями амплитудным и частотным. Настоящая статья посвящена изучению резонансных явлений в колебательной системе такого вида.

1. Пусть колебательной системе соответствует координата $q(t)$. Возбуждение движений осуществляется через координату u посредством кинематического, в общем случае неинтегрируемого, соотношения

$$\dot{u} = \varphi \alpha(\theta). \quad (1,1)$$

Структура связи из (1,1) характеризует разное назначение источников энергии в формировании колебательного процесса: координата $\varphi(t)$ соответствует амплитудному источнику и задает уровень амплитуды возбуждения; модуляция (управление) определяется функцией $\alpha(\theta)$, где координата $\theta(t)$ соответствует частотному источнику.

Из принципа Гамильтона — Остроградского с учетом (1,1) при использовании приема П. В. Воронца (⁶) следуют дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q(L) + R_q &= 0, \\ \mathcal{E}_\varphi(\Theta) + \frac{\partial \Theta}{\partial u} \alpha(\theta) + \frac{\partial L}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \dot{\theta} + R_\varphi + R_u \alpha(\theta) &= 0, \\ \mathcal{E}_\theta(\Theta) + R_\theta &= 0, \end{aligned} \quad (1,2)$$

которым соответствует динамическая модель определенного выше способа возбуждения колебаний. В уравнениях (1,2) Θ получается исключением из $L(q, \dot{q}, u, \dot{u}, \varphi, \theta, \dot{\theta})$ зависимых скоростей \dot{u} согласно (1,1); \mathcal{E} — оператор Эйлера; $R_\varphi, R_q, R_\theta, R_u$ — обобщенные силы, характеризующие трение, а также движущие силы источников энергии.

2. Рассматриваются резонансные колебания, близкие к гармоническим, когда $\alpha(\theta) \equiv \cos \theta$ и $\dot{\theta}$ близка к постоянной. При изучении механических колебаний можно считать, что L суть квадратичная форма. Используя стандартные допущения для класса задач ограниченного возбуж-

дения, соответствующим образом вводится малый параметр ε ($^1, ^2, ^3$), после чего уравнения (1,2) примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{q} + \omega^2 q &= \varepsilon \{f(q, \dot{q}) + F(\varphi, \theta) \sin \theta\}, \\ \ddot{\varphi} &= \varepsilon \{L_1(\varphi) - H_1(\varphi, \theta) + Q_1(\varphi, \dot{\varphi}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{q}, \ddot{q}) \cos \theta\}, \\ \ddot{\theta} &= \varepsilon \{L_2(\theta) - H_2(\varphi, \theta) + Q_2(\varphi, \varphi, \theta, \dot{\theta}, \theta) \cos \theta\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В уравнениях (2,1) обозначено: ω — собственная частота; $f(q, \dot{q})$ — нелинейная функция q и \dot{q} , заданная посредством R_q , функции Q_1 и Q_2 , квадратичности формы L относительно $q, \dot{q}, \varphi, \dot{\varphi}, \theta, \dot{\theta}, u$, являются алгебраическими полиномами относительно $q, \dot{q}, (\varphi, \theta) \sin \theta, (\varphi, \dot{\varphi}, \dots) \cos \theta, L_1, L_2$ — движущие силы источников энергии, а H_1 и H_2 — силы сопротивления, которые определяются соответствующими обобщенными силами R .

Легко видеть, что, когда $\theta \equiv \varphi$, уравнения (2,1) сводятся к двум уравнениям, которые описывают известные случаи взаимодействия колебательной системы с одним источником ($^{1-5}$).

Используя асимптотические методы (7), можно получить стационарные усредненные решения первого приближения, которые определяются из удобных для анализа соотношений

$$\begin{aligned} L_1(\Phi_1) - S_1(\Omega_1, \Phi_1, a_1(\Phi_1, \Omega_1)) &= 0, \quad L_2(\Omega_1) - S_2(\Omega_1, \Phi_1) = 0, \\ S_1 &\equiv H_1(\Omega_1, \Phi_1) + 2\Omega_1 \delta_c a_1^2 Q_1^{0*}(a_1)/F^0(\Omega, \Phi), \quad S_2 \equiv H_2(\Omega_1, \Phi_1), \\ a_1 &= \varepsilon F^0(\Omega_1, \Phi_1) / \sqrt{(\omega_c^2 - \Omega_1^2)^2 + 4\delta_c^2 \Omega_1^2}, \quad \text{ctg } \psi_1 = 2\delta_c \Omega_1 / (\omega_c^2 - \Omega_1^2), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где принято, что $()_1$ означает первое приближение в усреднении по θ за 2π и $()^0$ суть первые члены разложений в ряды по параметру ε , $\delta_c(a_c)$ и $\omega_c(a_c)$ — эквивалентные декремент затухания и собственная частота, a_c и ψ_1 — амплитуда и фаза колебаний по координате q , Φ_1 и Ω_1 — скорости изменения координат φ и θ . (Ниже индексы, указывающие на первое приближение, опускаются.)

Устойчивость решений из (2,2) можно выявить путем анализа уравнений в вариациях, составленных для усредненных уравнений первого приближения ($^7, ^8$). Если функции $\omega_c, \delta_c, Q_1^{0*}, F^0$ суть определенно положительные, а также, если F^0 — неубывающая относительно Φ , то условия устойчивости определяются неравенствами

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Phi} \{L_2(\Omega) - H_2(\Omega, \Phi)\} < 0, \quad \frac{\partial}{\partial \Phi} \{L_1(\Phi) - H_1(\Omega, \Phi)\} < 0, \\ \frac{d}{d\Phi} \{L_1(\Phi) - S_1(\Phi, \Omega, a(\Phi, \Omega))\} < 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

в которых количества, заключенные в $\{ \}$, вычисляются при значениях a, Φ, Ω , полученных из (2,2).

3. При возбуждении механических колебаний, как правило, в качестве источников энергии используются электродвигатели, поэтому для определенности считаем, что в уравнениях динамического равновесия ($L_1 - S_1 = 0, L_2 - S_2 = 0$) из (2,2) $L_1(\Phi)$ — движущий момент электродвигателя переменного тока и $L_2(\Omega)$ — движущий момент электродвигателя постоянного тока. Движущие моменты в соотношениях (2,2) уравновешиваются моментами сил сопротивления S_1 и S_2 , где S_1 — функция пропорциональная квадрату амплитуды колебаний, что определяет ее характерный максимум при резонансе в колебательной системе; функции $H_1(\Phi, \Omega), H_2(\Phi, \Omega)$ — обычно монотонно возрастающие.

Рассмотрим резонансное состояние при взаимодействии линейной колебательной системы с амплитудным и частотным источниками энергии. Пересечение цилиндра $L_1(\Phi)$ с поверхностью $S_1(\Phi, \Omega, a(\Phi, \Omega))$ дает пространственную линию, характеризующую возможные динамические состояния равновесия амплитудного источника (рис. 1). Проекция линии

динамического равновесия амплитудного источника на Φ, Ω -плоскости описывают функцию связи частот $\mathcal{F}(\Phi, \Omega) = 0$, которая указывает все возможные сочетания частот Φ и Ω .

Таким же образом можно представить построения, характеризующие динамические состояния частотного источника энергии. Здесь проекции точки пересечения L_1 с S на Φ, Ω -плоскость указывают возможные корни уравнений (2,2) как пары частот Φ и Ω (они соответствуют числам оборотов ротора электродвигателей), линия S_2 — пространственная линия, определенная на функции связи частот $\mathcal{F}(\Phi, \Omega) = 0$. Тогда изменение положения характеристики движущего момента частотного источника L_1 соответствующим образом переводит динамические состояния системы с одной частоты возбуждения Ω на другую.

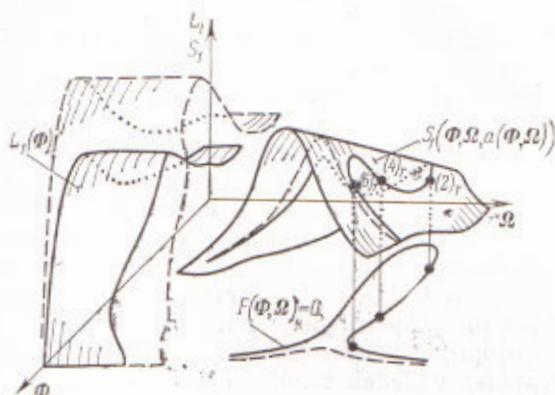


Рис. 1

Будем различать два случая резонансного поведения системы: случай достаточной мощности (на рис. 1, 3 выделен пунктиром) определяется как

$$\max_{\Phi} L_1(\Phi) \geq \max_{\Phi, \Omega} S_1(\Phi, \Omega, a(\Phi, \Omega)), \quad (3.1)$$

если выполняются условия (2,3) и устойчивы все резонансные амплитудные возбуждения, и случай недостаточной мощности

$$\max_{\Phi} L_1(\Phi) < \max_{\Phi, \Omega} S_1(\Phi, \Omega, a(\Omega, \Phi)), \quad (3.2)$$

здесь могут иметь место бифуркационные переходы в резонансной зоне.

Объясним возможные бифуркации, обратившись к рис. 2. Здесь представлены характерные ситуации взаимодействия в резонансной зоне, гео-

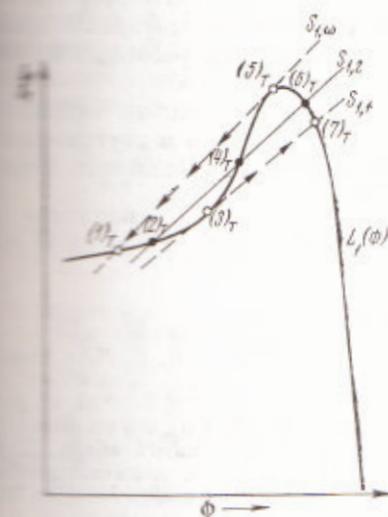


Рис. 2

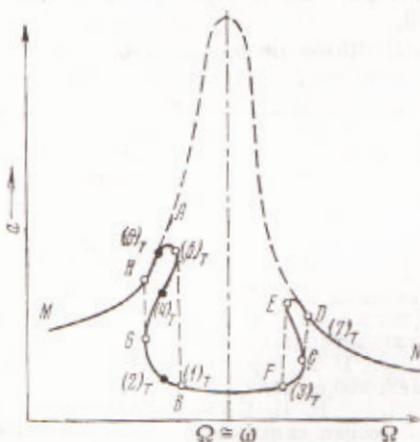


Рис. 3

метрически определяемые $\Omega = \text{const}$ сечениями, где $L_1(\Phi)$ — образующая цилиндра — движущий момент амплитудного источника и $S_{1,0} = S_1(\Omega, \Phi, a)_{a=0}$, $S_{1,1} = S_1(\Omega, \Phi, a)_{a=2a}$, $S_{1,2} = S_1(\Omega, \Phi, a)_{a=2a}$ — образующие, задающие поверхность $S_1(\Omega, \Phi, a)$. Бифуркационные переходы происходят по образующим типа $S_{1,0}$ и $S_{1,1}$ в направлениях, указанных стрелками, т. е. из точек $(5)_7$ и $(3)_7$ в точки $(1)_7$ и $(7)_7$. Средняя точка типа $(4)_7$ согласно (2,3) является неустойчивой. Динамические состояния, определяемые точками типа $(2)_7$ или $(6)_7$, согласно (2,3) оказываются устойчивыми.

Амплитудно-частотные зависимости $a(\Omega, \Phi)$ в проекции на $a\Omega$ -плоскость представлены на рис. 3. В случае достаточной мощности (пунктирная линия) устойчивы все резонансные амплитуды. При недостаточной мощности (условие (3,2)) наблюдается качественно новая резонансная ситуация, когда резонанс в линейной колебательной системе вырождается в некоторую биселинейную зависимость. Действительно, при прохождении резонанса реализуются участки MA, BC, DN и при обратном — ND, FG, AM . Участки AG и CE оказываются неустойчивыми, причем они характеризуются совокупностью точек типа $(4)_7$ (см. рис. 2), для которых условия (2,3) не имеют места. В классе механических колебательных моделей такому резонансу может соответствовать двухстепенная колебательная система со связями, характеризуемыми «жесткой» и «мягкой» нелинейностями.

4. Легко заметить, что в изученном типе систем можно синтезировать резонансную зависимость $a(\Omega, \Phi)$ достаточно произвольного вида путем только подбора соответствующей функции $L_1(\Phi)$, при этом структура циллиндра не требует изменений. Действительно, искомый вид характеристики движущего момента $L_1^*(\Phi)$ на основании (2,2) определяет условие

$$L_1^*(\Phi) = H_1(\Phi, \Omega) + 2\delta_0 a^{*2}(\Phi, \Omega) \cdot Q^{0*}(a^*)/F^0(\Omega, \Phi),$$

в котором Ω следует заменить на Φ согласно условию связи частот

$$\mathcal{F}^*(\Omega, \Phi) = a^{*2}(\Omega, \Phi) \{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta_0^2 \Omega^2\} - \varepsilon F^0(\Omega, \Phi) = 0$$

$$(\Omega, \Phi \in \mathcal{D}),$$

причем $a^*(\Phi, \Omega)$ — наперед заданная зависимость и \mathcal{D} — замкнутый прямоугольник, определяемый границами применимости уравнения (2,2) при учете (2,3).

Приведенное замечание выявляет возможность простого регулирования колебательных резонансных процессов, а также элементарный принцип синтеза систем, предназначенных для возбуждения резонансных колебаний.

Изложенные результаты без заметных затруднений можно использовать при изучении не только механических колебаний, но и других физических явлений, характеризуемых осцилляционными резонансами.

Государственный научно-исследовательский
институт машиноведения
Москва

Поступило
5 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Механика в СССР за 50 лет, «Наука», 1968, стр. 106. ² И. И. Блехман, Г. Ю. Джанелидзе, Изв. АН СССР, ОТН, № 10 (1955). ³ В. О. Кононенко, Колебательные системы с ограниченным возбуждением, «Наука», 1964. ⁴ М. Ф. Дамментберг, К. В. Фролов, ДАН, 174, № 6 (1966). ⁵ К. Ш. Ходжаев, Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, № 2 (1968). ⁶ П. В. Воронцов, Математич. сборн., 22, 4, Киев, 1961. ⁷ Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., 1958. ⁸ В. О. Кононенко, Изв. АН СССР, ОТН, № 2 (1961).