Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 4

УДК 518.92 МАТЕМАТИКА

Ю. С. ОСИПОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 6 V 1970)

В статье, имеющей своим источником исследования ([1], [2]) и примыкающей к работам ([1-12]), изложены некоторые результаты теории дифференциальных игр систем с последействием, связанные с конфликтной задачей о встрече управляемого движения с заданным замкнутым множеством $\mathscr{M}$, именуемым целью. Пусть управляемая система с последействием описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x_t(s), u) + f_2(t, x_t(s), v). \tag{1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор; r_1-мерный вектор u и r_2-мерный вектор v — управления, подчиненные первому и второму игроку соответственно и стесненные условиями

$$u \in \mathscr{U}, \quad v \in \mathscr{V}, \tag{2}$$

где $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ — компакты; функции $f_i(t, x(s), w)$, $i = 1, 2$ (здесь и в дальнейшем $s \in [-\tau, 0]$, $\tau = \mathrm{const} > 0$), отображающие соответственно $[t_\alpha, t_\beta] \times C_{[-\tau, 0]} \times \mathscr{U}$, $[t_\alpha, t_\beta] \times C_{[-\tau, 0]} \times \mathscr{V}$ в E_n, непрерывны и липшицевы по $x(s)$; $x_t(s) = x(t+s)$ — отрезок траектории системы (1), называемый состоянием системы в момент t; промежуток $[t_\alpha, t_\beta]$ содержит все промежутки времени, на которых изучается ниже поведение системы. Обозначим также $\|z\|$ — эвклидова норма в E_n; $\|x(s)\|_\tau = \max_s \|x(s)\|$ — норма в $C_{[-\tau, 0]}$.

Определения. (1°) Программным управлением первого (второго) игрока называется любая суммируемая на $[t_\alpha, t_\beta]$ функция $u(t)$ $(v(t))$, при почти всех t удовлетворяющая (2).

(2°) Стратегия U (V) первого (второго) игрока — правило, ставящее в соответствие каждой паре $p = \{t, x(s)\}$, $t \in [t_\alpha, t_\beta]$, $x(s) \in C_{[-\tau, 0]}$, называемой позицией игры, множество $\mathscr{U}(t, x(s)) = \mathscr{U}(p) \subset \mathscr{U}$ $(\mathscr{V}(t, x(s)) = \mathscr{V}(p) \subset \mathscr{V})$.

(3°) Правило U_T (V_T) ставящее в соответствие каждой позиции p множество $\mathscr{F}_1(p)$ $(\mathscr{F}_2(p))$, назовем тривиальной стратегией первого (второго) игрока. Здесь $\mathscr{F}_i(p) = \overline{\mathrm{co}}\, \{f_i(t, x(s), w) \mid w \in W_i\}$, $W_1 = \mathscr{U}$, $W_2 = \mathscr{V}$.

(4°) U_u, V_v — стратегии, определяемые соответственно (одноэлементными) множествами $\{f_1(t, x(s), u(t))\}$, $\{f_2(t, x(s), v(t))\}$. Здесь $u(t)$, $v(t)$ — некоторые программные управления.

Пусть Δ означает некоторое покрытие $[t_\alpha, t_\beta]$ полуинтервалами $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$, $\tau_0 = t_\alpha$, $i = 0, 1, \ldots$; число $\delta = \sup_i(\tau_{i+1} - \tau_i)$ — диаметр покрытия. Пусть $x_\alpha(s) \in C_{[-\tau, 0]}$ — начальное состояние системы (1), $p_\alpha = \{t_\alpha, x_\alpha(s)\}$. Обозначим символами $x_\Delta[t, p_\alpha, U, V_T]$, $x_\Delta[t, p_\alpha, U_T, V]$, $x[t, p_\alpha, U_T, V_v]$, $x[t, p_\alpha, U_u, V_T]$, $x_\Delta[t, p_\alpha, U, V_v]$, $x_\Delta[t, p_\alpha, U_u, V]$ абсолютно непрерывные функции $x[t]$, удовлетворяющие условию $x[t_\alpha + s] = x_\alpha(s)$ и при почти всех $t \in [t_\alpha, t_\beta]$ соответственно включениям

(а) $\dot{x}[t] \in f_1(t, x_t[s], u[t]) + \mathscr{F}_2(t, x_t[s])$;

(б) $\dot{x}[t] \in \mathscr{F}_1(t, x_t[s]) + f_2(t, x_t[s], v[t])$;

(в) $\dot{x}[t] \in \mathscr{F}_1(t, x_t[s]) + f_2(t, x_t[s], v(t))$;

(г) $\dot{x}[t] \in f_1(t, x_t[s], u(t)] + \mathscr{F}_2(t, x_t[s])$;

(д) $\dot{x}[t] = f_1(t, x_t[s], u[t]) + f_2(t, x_t[s], v(t))$;

(е) $\dot{x}[t] = f_1(t, x_t[s], u(t)) + f_2(t, x_t[s], v[t])$;

Здесь $u[t] = u[\tau_i] \in \mathscr{U}(\tau_i, x_{\tau_i}[s])$, $v[t] = v[\tau_i] \in \mathscr{V}(\tau_i, x_{\tau_i}[s])$, $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots$

Примечание 1. Соотношения а)—г) — суть уравнения с многозначной правой частью, осложненные эффектом последействия. Как и в случае отсутствия этого эффекта ([10], [13]), существование решений $x[t]$ непосредственно проверяется предельным переходом от соответствующих ломаных Эйлера. Сделанные предположения о f_i гарантируют существование и единственность на $[t_\alpha, t_\beta]$ (при выбранных $u[t]$, $v[t]$) решений уравнений д), е). Однако, поскольку выбор величин $u[\tau_i]$, $v[\tau_i]$ остается, вообще говоря, произвольным, то парам $\{U, V_v\}$, $\{U_u, V\}$ отвечают целые семейства решений д), е). Совокупность всех решений $x[t]$, отвечающих какому-то из конкретных определений а)—е), обозначается в дальнейшем символом $\{x[t]\}$.

Лемма 1. *В $C_{[t_\alpha, t_\beta]}$ любое из множеств $\{x[t]\}$ замкнуто и полунепрерывно сверху относительно включения по $x_\alpha(s)$.*

Пусть $x[t, p_\alpha, U_T, V]$ — элемент $C_{[t_\alpha, t_\beta]}$, обладающий следующим свойством: существует последовательность $\{\Delta_j\}$ с $\{\delta_j\} \to 0$ такая, что некоторая последовательность $x_{\Delta_j}[t, p_\alpha, U_T, V]$ сходится в $C_{[t_\alpha, t_\beta]}$ к $x[t, p_\alpha, U_T, V]$. Функцию $x[t, p_\alpha, U_T, V]$ будем называть движением системы (1) из позиции p_α, отвечающим паре стратегий $\{U_T, V\}$. Множество всех таких движений обозначим символом $\{x[t, p_\alpha, U_T, V]\}$. Аналогичным образом определяются множества движений $\{x[t, p_\alpha, U, V_T]\}$, $\{x[t, p_\alpha, U, V_v]\}$, $\{x[t, p_\alpha, U_u, V]\}$. (Заметим, что определенные таким путем множества движений не пусты).

Ниже формулируются результаты, связанные с построением стратегии U, гарантирующей в классе движений $\{x[t, p_\alpha, U, V_T]\}$ встречу движения (1) с целью $\mathscr{M}$ в момент (к моменту) ϑ.

Обозначим через $\rho(x, \mathscr{M})$ расстояние от $x \in E_n$ до $\mathscr{M}$.

Определения. Система (1) из позиции $p_* = \{t_*, x_*(s)\}$ поглощает цель $\mathscr{M}$ в момент (к моменту) $\vartheta \in [t_\alpha, t_\beta]$:

(5°) программно, если

$$\sup_{V_v} \inf_{x[t]} \rho(x[\vartheta], \mathscr{M}) = 0 \quad (\sup_{V_v^*} \inf_{x[t]} \min_{t_* \leqslant t \leqslant \vartheta} \rho(x[t], \mathscr{M}) = 0),$$

где $x[t] \in \{x[t, p_*, U_T, V_v]\}$;

(6°) позиционно, если

$$\sup_{V} \inf_{x[t]} \rho(x[\vartheta], \mathscr{M}) = 0 \quad (\sup_{V} \inf_{x[t]} \min_{t_* \leqslant t \leqslant \vartheta} \rho(x[t], \mathscr{M}) = 0),$$

где $x[t] \in \{x[t, p_*, U_T, V]\}$.

(7°) Совокупность всех $x(s) \in C_{[-\tau, 0]}$ таких, что из позиции $p = \{t, x(s)\}$ система (1) поглощает $\mathscr{M}$ программно в момент (к моменту) ϑ назовем множеством программного поглощения цели $\mathscr{M}$ в момент (к моменту) ϑ и обозначим символом $\mathscr{W}_t(\vartheta)$ $(\mathscr{W}_t^*(\vartheta))$. Аналогично определяется множество $\mathscr{W}_t(\vartheta)_n$ $(\mathscr{W}_t^*(\vartheta)_n)$ позиционного поглощения цели в момент (к моменту) ϑ.

Пусть каждому $t \in [t_\alpha, t_\beta]$ поставлено в соответствие некоторое множество $\mathscr{W}_t = \mathscr{W}_t\{x(s)\} \subset C_{[-\tau, 0]}$.

Определения. Система множеств $\mathscr{W}_t$, $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta$, (8°) сильно u-стабильна (сильно v-стабильна), (9°) u-стабильна (v-стабильна), если, каковы бы были позиция $p_* = \{t_*, x_*(s)\}$, $t_* \in [t_\alpha, t_\beta)$, $x_*(s) \in \mathscr{W}_{t_*}$; момент $t^* \in (t_*, t_\beta]$; стратегия V_v (U_u), среди движений $\{x[t, p_*, U_T, V_v]\}$ $(\{x[t, p_*, U_u, V_T]\})$ содержится движение со свойством

(8°) $x_{t^*}[s, p_*, U_T, V_v] \in \mathscr{W}_{t^*}$ $\quad (x_{t^*}[s, p_*, U_u, V_T] \in \mathscr{W}_{t^*})$;

(9°) $x_{t^*}[s, p_*, U_T, V_v] \in \mathscr{W}_{t^*}$ $\quad (x_{t^*}[s, p_*, U_u, V_T] \in \mathscr{W}_{t^*})$ или $x[t, p_*, U_T, V_v] \in \mathscr{M}$ $(x[t, p_*, U_u, V_T] \in \mathscr{M})$ хотя бы при одном $t \in [t_*, t^*]$.

Лемма 2. *Множества* $\mathscr{W}_t(\vartheta)$, $\mathscr{W}_t^*(\vartheta)$, $\mathscr{W}_t(\vartheta)_n$, $\mathscr{W}_t^*(\vartheta)_n$ *замкнуты в* $C_{[-\tau, 0]}$. *Справедливы включения*

$$\mathscr{W}_t(\vartheta) \subset \mathscr{W}_t^*(\vartheta), \quad \mathscr{W}_t(\vartheta)_n \subset \mathscr{W}_t^*(\vartheta)_n,$$
$$\mathscr{W}_t(\vartheta)_n \subset \mathscr{W}_t(\vartheta), \quad \mathscr{W}_t^*(\vartheta)_n \subset \mathscr{W}_t^*(\vartheta).$$

Лемма 3. (1°) *Система множеств* $\mathscr{W}_t^*(\vartheta)_n$, $t_\alpha \leqslant t \leqslant \vartheta$, *u-стабильна.*
(2°) *Пусть* $\mathscr{W}_{t_\alpha}(\vartheta)_n$ *не пусто.*

Тогда при любом $t \in [t_\alpha, t_\beta]$ *не пусто* $\mathscr{W}_t(\vartheta)_n$, *и система множеств* $\mathscr{W}_t(\vartheta)_n$, $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta$, *сильно u-стабильна.*

Пусть $\xi \in [-\tau, 0]$. Множество $\mathscr{W}_{t\xi} = \{x(\xi) \,|\, x(s) \in \mathscr{W}_t\} \subset E_n$ назовем ξ-сечением множества $\mathscr{W}_t$; последовательность $\{x^{(h)}(\xi)\}$ назовем ξ-сечением последовательности $\{x^{(h)}(s)\}$, $x^{(h)}(s) \in C_{[-\tau, 0]}$. Положим

$$r(x(s), \mathscr{W}_t) = \inf_{y \in \mathscr{W}_t} \| x(s) - y(s) \|_\tau. \tag{3}$$

Пусть $Z(x(0))$ — совокупность элементов, ближайших к $x(0)$ в E_n из множества частичных пределов последовательности $\{x^{(h)}(0)\}$, являющейся 0-сечением какой-либо минимизирующей для $x(s)$ последовательности $\{y\} = \{x^{(h)}(s)\}$ из (3).

Определение (10°). Экстремальными к системе множеств $\mathscr{W}_t$, $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta$, назовем стратегии U^e, V^e, задаваемые соответственно множествами $U^e(t, x(s))$, $\mathscr{V}^e(t, x(s))$, построенными по правилу

$$\mathscr{U}^e(t, x(s)) = \{u_e \,|\, (z - x(0)) f_1(t, x(s), u_e) = \max_{u \in \mathscr{U}} (z - x(0)) f_1(t, x(s), u)\},$$

$$\mathscr{V}^e(t, x(s)) = \{v_e \,|\, (z - x(0)) f_2(t, x(s), v_e) = \max_{v \in \mathscr{V}} (z - x(0)) f_2(t, x(s), v)\}$$

по крайней мере при одном $z \in Z(x(0))$.

Лемма 4. *Пусть начальная позиция* $p_\alpha = \{t_\alpha, x_\alpha(s)\}$ *игры такова, что* $x_\alpha(s) \in \mathscr{W}_{t_\alpha}$. *Если система* $\mathscr{W}_t$, $t_\alpha \leqslant t \leqslant \vartheta$ *сильно u-стабильна* (*сильно v-стабильна*), *то экстремальная к ней стратегия* U^e (V^e) *обеспечивает равенство*

$$r(x_t[s], \mathscr{W}_t) = 0, \quad t_\alpha \leqslant t \leqslant \vartheta,$$

для любого $x[t] \in \{x[t, p_\alpha, U^e, V_T]\}$ ($x[t] \in \{x[t, p_\alpha, U_T, V^e]\}$).

Если система $\mathscr{W}_t$, $t_\alpha \leqslant t \leqslant \vartheta$, *u-стабильна и* $\mathscr{W}_{\vartheta 0} \subset \mathscr{M}$, *то экстремальная стратегия* U^e *обеспечивает равенство*

$$\min_{t_\alpha \leqslant t \leqslant \vartheta} \rho(x[t], \mathscr{M}) = 0$$

для любого $x[t] \in \{x[t, p_\alpha, U^e, V_T]\}$.

Теорема 1. *Пусть система множеств* $\mathscr{W}_t$, $t_\alpha \leqslant t \leqslant \vartheta$, *сильно u-стабильна* (*u-стабильна,* $\mathscr{W}_{\vartheta 0} \subset \mathscr{M}$) *и* $x_\alpha(s) \in \mathscr{W}_{t_\alpha}$. *Экстремальная к этой системе множеств стратегия* U^e *гарантирует в классе движений* $\{x[t, p_\alpha, U^e, V_T]\}$ *сближение системы* (1) *с целью* $\mathscr{M}$ *в момент* (*не позже чем к моменту*) ϑ.

Если некоторая система множеств $\mathscr{W}_t$, $t_\alpha \leqslant t \leqslant \vartheta$, u-стабильна (сильно u-стабильна) и $\mathscr{W}_{\vartheta 0} \subset \mathscr{M}$, то $\mathscr{W}_t \subset \mathscr{W}_t^*(\vartheta)$ $\mathscr{W}_t \subset \mathscr{W}_t(\vartheta))$ (см. также лемму 2). Поэтому представляют интерес условия u-стабильности (сильной u-стабильности) множеств $\mathscr{W}_t^*(\vartheta)$ ($\mathscr{W}_t(\vartheta)$).

Пусть фиксированы позиция $p_* = \{t_*, x_*(s)\}$, число $\delta > 0$, стратегия V_v.

Условие А. Для любых фиксированных позиции p_*, стратегии V_v, числа $\delta \in [0, \delta_0]$ (где δ_0 достаточно мало) множество $\{x_{t_*+\delta}\ [s, p_*, U_T, V_v]\}$ является выпуклым.

Предположим, что позиция p_* такова, что $x_*(s) \in \mathscr{W}_{t_*}(\vartheta)$ ($x_*(s) \in \in \mathscr{W}_{t_*}^*(\vartheta)$). В силу определения (7°), какова бы ни была стратегия V_v второго игрока, существует траектория $x[t] = x[t, p_*, U_T, V_v]$ системы (1), обладающая свойством встречи с целью $\mathscr{M}$ в момент (к моменту) ϑ. Совокупность этих траекторий обозначим символом $[x[t]]$. Имеем соответствие $V_v \to [x[t]]$.

Предположим, что позиция $p^* = \{t^*, x^*(s)\}$ удовлетворяет условию: $x^*(s) \notin \mathscr{W}_{t^*}(\vartheta)$ $(x^*(s) \notin \mathscr{W}_{t^*}^*(\vartheta))$. Каждому элементу $x^*(s)$ в силу определения (7°) поставим в соответствие совокупность стратегий $\{V_{v^*}\}$, обладающих свойством $x[\vartheta, p^*, U_T, V_{v^*}] \notin \mathscr{M}$ $(x[t, p^*, U_T, V_{v^*}] \notin \mathscr{M}$ при $t \in [t^*, \vartheta])$. Имеем соответствие $x^*(s) \to \{V_{v^*}\}$.

Пусть теперь $t^* = t_* + \delta$, $\delta > 0$. Положим

$$v(t) = \begin{cases} v_0(t), & t_* \leqslant t < t^*; \\ v^*(t), & t^* \leqslant t \leqslant \vartheta; \end{cases} \tag{4}$$

где $v^*(t)$ — функция, порождающая какую-нибудь стратегию V_{v^*} из определенного выше семейства $\{V_{v^*}\}$; $v_0(t)$ — произвольная суммируемая функция, удовлетворяющая включение (2). В силу соответствий $x^*(s) \to \{V_{v^*}\}$ и $V_v \to [x[t]]$ имеем отображение $x^*(s) \to [x_{t^*}[s]]$.

Условие В. Каковы бы ни были позиция $p_* = \{t_*, x_*(s)\}$, $x_*(s) \in \mathscr{W}_{t_*}(\vartheta)$ $(x_*(s) \in \mathscr{W}_{t_*}^*(\vartheta))$ стратегия V_v, где v определено в (10) достаточно малое число $\delta > 0$, отображение $x^*(s) \to [x_{t^*}[s]]$ можно выбрать таким, что множества $[x_{t^*}[s]]$ будут выпуклыми, замкнутыми, полунепрерывными сверху относительно включения по $x^*(s)$.

Лемма 5. *При условиях* А, В *система множеств* $\mathscr{W}_t(\vartheta)$ $(\mathscr{W}_t^*(\vartheta))$, $t_\alpha \leqslant t \leqslant \vartheta$, *сильно u-стабильна* (*u-стабильна*).

Теорема 2. *Пусть начальная позиция* $p_\alpha = \{t_\alpha, x_\alpha(s)\}$ *такова, что* $x_\alpha(s) \in \mathscr{W}_{t_\alpha}(\vartheta)$ $(x_\alpha(s) \in \mathscr{W}_{t_\alpha}^*(\vartheta))$ *и пусть выполнены условия* А, В. *Экстремальная к системе множеств* $\mathscr{W}_t(\vartheta)$ $(\mathscr{W}_t^*(\vartheta))$, $t_\alpha \leqslant t \leqslant \vartheta$, *стратегия* U^e *гарантирует в классе движений* $\{x[t, p_\alpha, U^e, V_T]\}$ *сближение системы* (1) *с целью* $\mathscr{M}$ *в момент* (*к моменту*) ϑ.

Автор выражает глубокую благодарность Н. Н. Красовскому за ценные советы и замечания.

Свердловское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
20 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Красовский, ПММ, 34, в. 2, 195 (1970). [2] Н. Н. Красовский, ДАН, 191, № 2, 250 (1970). [3] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, ДАН, 190, № 3, 523 (1970). [4] Л. С. Понтрягин, ДАН, 175, № 4, 764 (1970). [5] Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягин, ДАН, 174, № 1, 27 (1967). [6] Н. Н. Красовский, ПММ, 27, в. 2 (1963). [7] Н. Н. Красовский, Теория управления движением, «Наука», 1968. [8] Б. Н. Пшеничный, Автоматика и телемеханика, № 1, 65 (1968). [9] Н. Н. Красовский, ПММ, 32, в. 5, 793 (1968). [10] Н. Н. Красовский, ДАН, 182, № 6, 1287 (1968). [11] Н. Н. Красовский, Дифференциальные уравнения, 5, № 3, 407 (1969). [12] Н. Н. Красовский, ПММ, 32, в. 6, 972 (1968). [13] А. Ф. Филиппов, Матем. сборн., 51, в. 1, 99 (1960).