Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 4

УДК 519.95

МАТЕМАТИКА

ЮЛИЯ ШМУКЛЕР

ЗАДАЧА ГОЛОСОВАНИЯ СО СЛУЧАЙНОЙ ОШИБКОЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 2 VII 1970)

1°. Постановка задачи и результат. Работа посвящена исследованию одной из простейших однородных сред — голосованию со случайной ошибкой [1]. Рассматривается случай конечной среды, состоящей из n точек, расположенных на окружности (в дальнейшем мы будем называть такую среду кольцом). Каждая точка среды может находиться в одном из двух состояний: $+1$ и -1. Пусть в момент времени t фиксировано состояние каждой точки. Тогда в момент времени $t+1$ одна случайно выбранная (с вероятностью $1/n$) точка среды с вероятностью $1-\varepsilon$ будет находиться в том же состоянии, в каком находилось большинство ее соседей, включая и ее, в момент времени t, а с вероятностью ε будет находиться в противоположном состоянии (совершит ошибку). Требуется найти финальное распределение вероятностей состояний такой среды (при ненулевой вероятности ошибки ε система эргодична).

В настоящей работе получено точное аналитическое решение этой задачи, опирающееся на идеи и методы статистической физики и установлена тождественность задачи с одномерной моделью Изинга, хорошо известной в теории фазовых переходов [2]. Финальная вероятность состояния среды зависит только от числа $2m$ смен знака в состоянии системы, определяемом как n-значения последовательность $+1$ и -1, и равна

$$P(2m) = \gamma[\varepsilon/(1-\varepsilon)]^m, \tag{1}$$

а суммарная вероятность всех состояний с данным числом смен знака равна

$$W(2m) = 2\gamma C_n^{2m}[\varepsilon/(1-\varepsilon)]^m, \tag{2}$$

где γ — нормировочный коэффициент,

$$\gamma = [(1+\sqrt{\varepsilon/(1-\varepsilon)})^n + (1-\sqrt{\varepsilon/(1-\varepsilon)})^n]^{-1}. \tag{3}$$

2°. Решение. Подход к задаче основан на том, что широкий класс процессов, обладающих чертами «поведения» можно интерпретировать как процессы релаксации (перехода к равновесию) в некоторой физической системе с определенным спектром уровней энергии, находящейся в контакте с термостатом [3]. Роль термостата играет ансамбль из N одинаковых систем (N — большое число), в точности подобных данной, а роль случайных тепловых возмущений, возникающих при контакте системы с термостатом — определенным образом организованное взаимодействие между системами, входящими в ансамбль. Тогда для каждой выбранной из ансамбля системы вероятности перехода из состояния в состояние (заданные в условии задачи) определяются как результат взаимодействия при условии, что весь ансамбль в целом находится в состоянии термодинамического равновесия.

При таком подходе трудности, возникающие при нахождении финальных вероятностей для стохастических матриц с произвольно большим числом состояний, обходятся правильным выбором гамильтониана системы (определяющим энергию как функцию состояния системы) и правильной организацией взаимодействия между системами в ансамбле.

Энергетический спектр системы. Система (кольцо) может находиться в 2^n в состояниях, каждое из которых является n-значной последовательностью $+1$ и -1. Эта ситуация напоминает известную в статической физике одномерную модель Изинга, в которой проекция спина каждого из n атомов может принимать два различных значения: $\sigma_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Поэтому за гамильтониан системы был предварительно принят гамильтониан модели Изинга

$$H(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = -\sum_{i=1}^{n} \sigma_i \sigma_{i+1}; \ (\sigma_{n+1} = \sigma_1). \tag{4}$$

Легко видеть, что в силу симметричности матрицы переходных вероятностей кольца вероятность найти в любой точке кольца $+1$ или -1 равна $^1/_2$, что эквивалентно отсутствию магнитного внешнего поля в модели Изинга. В соответствии с гамильтонианом (4) энергия состояния кольца (определенной конфигурации спинов) может принимать значения от $E_{\min} = -n$ (все спины имеют одинаковое направление) до

$$E_{\max} = \begin{cases} +n \ (n \text{ — четное}) \\ +n - 2 \ (n \text{ — нечетное}) \end{cases}$$

(соседние спины имеют противоположные направления).

Заметим, что энергия конфигурации зависит только от числа точек перехода l — воображаемых точек, разделяющих спины противоположных ориентаций, т. е. от числа смен знака в конфигурации ($l = 2m$, число четное). Каждая точка перехода увеличивает энергию конфигурации по сравнению с минимальной ($l = 0$) на 2, поэтому энергия конфигурации с $l = 2m$ точками перехода равна

$$E(2m) = -(n - 4m). \tag{5}$$

Аналогично ([3]), образуем ансамбль из N колец (газ) и зададим число K — сумму энергий всех колец (энергия газа). Зададим также правила взаимодействия между кольцами, обеспечивающие, во-первых, сохранение заданного K в процессе взаимодействия (что соответствует движению газа по поверхности постоянной энергии K) и, во-вторых, микроканоническое равновероятное распределение вероятностей состояний газа, определяемых как упорядоченный набор состояний всех колец, образующих газ.

Тогда статистическое распределение для малой подсистемы (одного кольца $l = 2m$), находящейся в состоянии равновесия с газом, обладающим микроканоническим распределением, представляет собой распределение Гиббса, соответствующее некоторой фиксированной температуре T ($1/T = \beta$):

$$P(2m) = \alpha e^{-\beta[-(n-4m)]},$$

где α — нормировочная константа (статсумма).

Обозначив

$$e^{-2\beta} = a, \tag{6}$$

получим

$$P(2m) = \gamma a^{2m}. \tag{7}$$

Суммарная вероятность всех состояний с данной энергией равна

$$w(2m) = 2\gamma C_n^{2m} a^{2m}. \tag{8}$$

Из условия нормировки $\sum_{m=0}^{n/2} w(2m) = 1$ следует, что

$$\gamma = [(1 + a)^n + (1 - a)^n]^{-1}. \tag{9}$$

Взаимодействие колец в газе. Согласно (4) каждая точка, в зависимости от состояния ее соседей и собственного, может находиться в одной из трех позиций, определяемых ее вкладом в гамильтониан системы. Сумма двух членов гамильтониана, зависящих от состояния данной точки, может принимать одно из трех значений:

$$\begin{array}{llll} & i-1 & i & i+1 \\ 1) & +1 & +1 & +1 \\ & -1 & -1 & -1 \end{array} \Bigg\} \ \xi_i = \sigma_{i-1}\sigma_i + \sigma_i\sigma_{i+1} = 2 \quad \text{(позиция индекса 2);}$$

$$\begin{array}{llll} 2) & +1 & -1 & +1 \\ & -1 & +1 & -1 \end{array} \Bigg\} \ \xi_i = \sigma_{i-1}\sigma_i + \sigma_i\sigma_{i+1} = -2 \quad \text{(позиция индекса } -2\text{);}$$

$$\begin{array}{llll} & +1 & +1 & -1 \\ & +1 & -1 & -1 \\ 3) & -1 & -1 & +1 \\ & -1 & +1 & +1 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \ \xi_i = \sigma_{i-1}\sigma_i + \sigma_i\sigma_{i+1} = 0 \quad \text{(позиция индекса 0).}$$

При фиксированном числе l точек перехода в конфигурации вероятность того, что данная точка находится в позиции $\xi = 2$ равна

$$q(\xi = 2) = C_{n-2}^{l} / C_n^{l}.$$

Аналогично $q(\xi = -2) = C_{n-2}^{l-2}/C_n^l$; $q(\xi = 0) = 2C_{n-2}^{l-1}/C_n^l$.

Безусловная вероятность встретить в кольце точку позиции $\xi = 2$ равна

$$Q(\xi = 2) = \sum_{m=0}^{[n/2]} q(\xi = 2)\, w(2m) = \gamma\, \frac{(1+a)^{n-2} + (1-a)^{n-2}}{2}. \tag{10}$$

Аналогично

$$Q(\xi = -2) = \gamma a^2 [(1+a)^{n-2} + (1-a)^{n-2}] / 2; \tag{11}$$

$$Q(\xi = 0) = 2\gamma a [(1+a)^{n-2} - (1-a)^{n-2}] / 2. \tag{12}$$

Организуем следующее взаимодействие между кольцами в ансамбле:

1) в каждый момент времени взаимодействуют лишь два кольца, для любой пары вероятности взаимодействия равны $(1 / C_N^2)$;

2) в каждом из двух взаимодействующих колец случайным образом (с вероятностью $1/n$) выбирается точка и определяется ее позиция;

3) если это позиции $\xi_1 = 2$ и $\xi_2 = -2$ (и наоборот), то с вероятностью ρ точки одновременно меняют знак, и, следовательно, позиции меняют индексы на противоположные ($\xi_1 = -2$, $\xi_2 = +2$);

4) если это позиции $\xi_1 = 0$ и $\xi_2 = 0$, то точки меняют знаки одновременно с вероятностью ω, при этом позиции остаются теми же ($\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$);

5) при других комбинациях индексов точки всегда сохраняют знаки.

Нетрудно проверить, что при выполнении данных правил матрица переходных вероятностей для всего газа колец оказывается симметрической и, следовательно, дважды стохастической.

Определим теперь переходные вероятности между различными позициями какой-либо одной точки кольца, возникающие после достаточно долгого взаимодействия с остальными $N-1$ кольцами. Вероятность перехода на один такт произвольной точки кольца, находящейся в позиции $\xi_i = 2$, в позицию $\xi_i = -2$, равна

$$P\{\xi_i = +2 \to \xi_i = -2\} = Q(\xi = -2)\rho,$$

$$P\{\xi_i = -2 \to \xi_i = +2\} = Q(\xi = +2)\rho.$$

Согласно условию задачи о голосовании, должно соблюдаться соотношение

$$P\{\xi_i = +2 \to \xi_i = -2\} / P\{\xi_i = -2 \to \xi_i = +2\} = \varepsilon / (1-\varepsilon).$$

Но, учитывая (10) и (11), имеем $P\{\xi_i = +2 \to \xi_i = -2\} / P\{\xi_i = -2 \to \xi_i = +2\} = a^2$. Отсюда

$$a^2 = \varepsilon / (1-\varepsilon). \tag{13}$$

При выполнении соотношения (13) выражения (7)—(9) переходят в (1)—(3), определяющие финальные вероятности состояний системы. Вероятность ошибки ε играет роль параметра, задающего температуру системы. Так же, как и в задаче, рассмотренной в ([3]), логарифм отношения вероятностей перехода между двумя состояниями системы, равен отношению разности энергий соответствующих состояний к температуре

$$\Delta E \,/\, T = 4\beta = \ln(1-\varepsilon) \,/\, \varepsilon. \tag{14}$$

В частности,

1) $T = 0$, $\varepsilon = 0$, $2m = 0$ — во всех кольцах спины направлены одинаково;

2) $T = \infty$, $\varepsilon = {}^1/_2$ — все возможные конфигурации равновероятны;

3) $T = -0$, $\varepsilon = 1$, $2m = n$ — во всех кольцах соседние спины направлены противоположно.

3°. Проверка. Проверим полученную формулу (1) непосредственной подстановкой в уравнения для финальных вероятностей исходной задачи. Пусть имеется конфигурация с $2m$ точками перехода, содержащая k точек позиции $+2$, r точек позиции -2 и s точек позиции 0, так что $n = k + r + s$. Так как голосование каждый раз происходит в одной точке, данная конфигурация может быть получена переходом из n других конфигураций, отличающихся от данной только одной позицией, а также переходом данной конфигурации самой в себя. Конфигурации, отличающиеся от данной одной позицией индекса 0, имеют то же число точек перехода $2m$; конфигурации, отличающиеся от данной одной позицией индекса 2 (вместо $\xi = -2$ в данной), содержат $(2m-2)$ точек перехода и, наконец, конфигурации, отличающиеся от данной одной позицией индекса -2 (вместо $\xi = +2$) содержат $(2m+2)$ точек перехода.

Отсюда

$$P(2m) = \frac{1}{n}\,[s\delta P(2m) + s(1-\delta)P(2m) + r\varepsilon P(2m) + k(1-\varepsilon)P(2m) + r\varepsilon P(2m-2) + k(1-\varepsilon)P(2m+2)]. \tag{15}$$

где δ — вероятность «ошибки» в позиции индекса 0, $\delta = \omega Q(\xi = 0)$. Величина δ, очевидно, не влияет на вид финального распределения. Нетрудно проверить, что подстановка в уравнение (15) значений $P(2m)$ согласно (1) (для $l = 2m$, $2m-2$, $2m+2$) обращает его в тождество.

Итак, финальное распределение вероятностей в задаче голосования со случайной ошибкой соответствует состоянию термодинамического равновесия в одномерной модели Изинга. Как известно из статистической физики, в одномерной модели Изинга при бесконечном увеличении размеров системы ($n \to \infty$) исчезает корреляция между направлениями спинов, расположенных далеко друг от друга. Действительно, вероятность того, что точка, отстоящая от данной на f интервалов, имеет тот же знак, что и данная, равна

$$w\left(\begin{matrix}+1\\-1\end{matrix}\Big/\underset{f}{\dots}\begin{matrix}+1\\-1\end{matrix}\right) = \frac{[(1+a)^{n-f} + (1-a)^{n-f}]\,[(1+a)^f + (1-a)^f]}{2\,[(1+a)^n + (1-a)^n]}$$

$$\lim_{n\to\infty,\, f\to\infty} w\left(\begin{matrix}+1\\-1\end{matrix}\Big/\underset{f}{\dots}\begin{matrix}+1\\-1\end{matrix}\right) \to {}^1/_2.$$

Тем самым, как и следовало ожидать, в системе отсутствует фазовый переход.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Н. Б. Васильеву, А. М. Леонтовичу, А. Я. Лернеру и И. И. Пятецкому-Шапиро за постановку задачи и плодотворные обсуждения.

Институт проблем управления
Академии наук СССР
Москва

Поступило
20 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Б. Васильев, М. Б. Петровская, И. И. Пятецкий-Шапиро, Автоматика и телемеханика, № 10, 103 (1969). [2] Керзон Хуанг, Статистическая механика, М., 1966. [3] Ю. И. Шмуклер, ДАН, 182, № 6, 1290 (1968).