Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 4

УДК 539.4.013, 0.15 *ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ, Г. И. СТАРОСТИН

О ВОЗМОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ БЕЗМОМЕНТНОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕК ПУТЕМ АРМИРОВАНИЯ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 16 IV 1970)

В произвольно нагруженных оболочках возникают изгибные напряжения, сравнимые по величине с мембранными, что приводит к неравномерности работы сечения оболочки. Уменьшение или ликвидация изгибных напряжений приводит к улучшению качества оболочечной конструкции. В настоящей работе предлагается постановка задачи обеспечения безмоментного состояния, в соответствии с которой безмоментность напряженного состояния оболочки должна быть обеспечена за счет выбора закона армирования. Решения этой задачи весьма перспективны с точки зрения практического осуществления, так как уже в настоящее время каких-либо серьезных технологических ограничений по созданию любой армированной оболочки не существует.

1. При наличии достаточно большого числа одинаковых армирующих слоев в пределах толщины оболочки будем пользоваться следующими предположениями:

а) материал оболочки является макрооднородным, причем для каждого элементарного слоя в направлении нормальной координаты z к срединной поверхности справедлива модель, принятая в [1];

б) оболочка тонкая и для нее справедливы гипотезы Кирхгофа — Лява (это предположение принято для определенности и простоты; можно использовать более общие предположения, как например в [2], или другие, но это не меняет существа дела);

в) материал всех элементов армированной композиции различен и обладает упругими свойствами;

г) каждый из армированных слоев содержит N семейств армирующих нитей, составляющих в данном сечении оболочки углы ψ_n, $n=1, 2, \ldots N$, с направлением α_1 ортогональной системы координат α_1, α_2 с осями вдоль линий главных кривизн поверхности $z=\text{const}$.

В соответствии с принятыми предположениями зависимость между напряжениями и деформациями в рассматриваемой армированной оболочке

$$\boldsymbol{\sigma}(\alpha_i, z) = \|a_{km}\|(\boldsymbol{\varepsilon}_0 + z\boldsymbol{\varkappa}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} + z\boldsymbol{\varkappa} = \|b_{km}\|\boldsymbol{\sigma}(\alpha_i z), \quad \|b_{km}\| = \|a_{km}\|^{-1}; \qquad (1,1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\alpha_i, z) = \|\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\|', \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \|\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}, \varepsilon_{03}\|', \quad \boldsymbol{\varkappa} = \|\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3\|',$$
$$k, m = 1, 2, 3. \qquad (1,2)$$

Здесь $\varepsilon_{01,2}$ — деформации растяжения, $\varepsilon_{03} = 2\varepsilon_{12}$ — деформация сдвига срединной поверхности; $\varkappa_{1,2}$ — изменение ее кривизн и $\varkappa_3$ — кручение; $\sigma_{1,2}$ — нормальные и σ_3 — касательное напряжения в оболочке; коэффициенты a_{km} равны [1]

$$a_{ii} = \frac{aE}{1-\nu^2} + \sum_{n=1}^{N} \omega_n E_n l_{in}^4, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{aE_\nu}{1-\nu^2} + \sum_{n=1}^{N} \omega_n E_n l_{1n}^2 l_{2n}^2, \qquad (1,3)$$

$$a_{i3} = a_{3i} = \sum_{n=1}^{N} \omega_n E_n l_{in}^3 l_{jn}, \quad a_{33} = \frac{aE}{2(1+\nu)} + \sum_{n=1}^{N} \omega_n E_n l_{1n}^2 l_{2n}^2, \quad i,j = 1, 2, \ i \neq j.$$

$l_{1n} = \cos\psi_n$, $l_{2n} = \sin\psi_n$, $0 \leqslant \psi_n \leqslant \pi$; E, E_n — модули Юнга материалов заполнителя и нитей n-го семейства соответственно; ν — коэффициент Пуассона заполнителя; ω — плотность армирования, индекс n относится к n-му семейству; коэффициент a определен в ([1]); штрих у значка матрицы (1,2) и всюду ниже означает операцию транспонирования. Отметим, что коэффициенты a_{km}, а следовательно, и b_{km} зависят от координат α_i.

Из (1,1) обычным путем ([3]) получим следующие зависимости между усилиями T_k, моментами M_k, деформациями ε_{0k} и изменением кривизн $\varkappa_k$ срединной поверхности оболочки:

$$\mathbf{T} = 2H\|a_{km}\|\boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad \mathbf{M} = {}^2/_3H^3\|a_{km}\|\boldsymbol{\varkappa}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = (2H)^{-1}\|b_{km}\|\mathbf{T},$$

$$\mathbf{T} = \|T_1, T_2, T_3\|', \quad \mathbf{M} = \|M_1, M_2, M_3\|', \tag{1,4}$$

где $T_{1,2}$ и T_3 — нормальные и касательное усилия соответственно; $M_{1,2}$ и M_3 — соответственно изгибающие и крутящий моменты, $2H$ — толщина оболочки.

2. Допустим, что всюду в оболочке реализуется безмоментное напряженное состояние ($\mathbf{M} = 0$). Из (1,4) следует, что в случае $\det\|a_{km}\| \neq 0$ это возможно при $\varkappa = 0$. Тогда уравнения совместности деформаций срединной поверхности ([2]) примут вид

$$\frac{\varepsilon_{03}}{R_i}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{R_j}\left[\frac{\partial A_i\varepsilon_{0i}}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_j\varepsilon_{03}}{\partial \alpha_i} - \varepsilon_{0j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\right] = 0, \quad i, j = 1, 2, \ i \neq j,$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\frac{1}{A_i}\left[A_j\frac{\partial \varepsilon_{0j}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(\varepsilon_{0j} - \varepsilon_{0i}) - \frac{1}{2}A_i\frac{\partial \varepsilon_{03}}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\varepsilon_{03}\right] = 0, \tag{2,1}$$

где $R_{1,2}$ — главные радиусы кривизны, $A_{1,2}$ — коэффициенты первой основной квадратичной формы срединной поверхности. Подставив в (2,1) вместо ε_{0k} их выражения через T_k в соответствии с (1,4), получим условия безмоментности для армированных оболочек:

$$\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{b_{3k}T_k}{2HR_i}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{R_j}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(\frac{A_ib_{ik}T_k}{2H}\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(\frac{A_jb_{3k}T_k}{2H}\right) - \frac{b_{jk}T_k}{2H}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\right]\right\} = 0,$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\frac{1}{A_i}\left[A_j\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(\frac{b_{jk}T_k}{2H}\right)\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\frac{(b_{jk} - b_{ik})T_k}{2H} - \right. \tag{2,2}$$

$$\left. - \frac{1}{2}A_i\frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(\frac{b_{3k}T_k}{2H}\right) - \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{b_{3k}T_k}{24}\right] = 0, \quad i, j = 1, 2, \ i \neq j.$$

Присоединив к (1, 2) уравнения равновесия безмоментной оболочки

$$\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial A_jT_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_iT_3}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}T_3 - \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}T_j\right] + p_i = 0, \quad i, j = 1, 2, i \neq j,$$

$$T_1R_2 + T_2R_1 = p_3R_1R_2, \tag{2,3}$$

($p_{1,2,3}$ — составляющие внешней поверхности нагрузки), получим систему уравнений, решение которой при соответствующих граничных условиях определяет проект всюду безмоментной оболочки.

Полученная система допускает широкий класс различных частных постановок: определение характера армирования оболочек при заданных нагрузках и геометрии оболочки; определение характера геометрии оболочки при заданных нагрузках и функциях армирования; определение характера нагрузки при заданных геометрии оболочки и характере армирования; целый ряд смешанных постановок, например, определение совместного изменения геометрии оболочки и характера армирования, определение совместного изменения нагрузки и характера армирования и т. п.

Перемещения в таких безмоментных оболочках можно определить из уравнений

$$\frac{u_3}{R_i}+\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_j=\frac{1}{2H}\sum_{k=1}^{3}b_{ik}T_k,$$

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{A_j}{A_i}\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(\frac{u_j}{A_j}\right)=\frac{1}{2H}\sum_{k=1}^{3}b_{3k}T_k, \tag{2,4}$$

u_i — перемещения в направлениях α_i, u_3 — прогиб.

Для напряжений в связующем и в армирующих элементах получим выражения:

$$\sigma_i^0=\frac{E}{2H(1-\nu^2)}\sum_{k=1}^{3}(b_{ik}+\nu b_{jk})T_k,\quad \sigma_3^0=\frac{E}{4H(1+\nu)}\sum_{k=1}^{3}b_{3k}T_k,$$

$$i, j=1, 2,\ i\neq j,$$

$$\sigma_n=\frac{E_n}{2H}\sum_{k=1}^{3}(b_{1k}l_{1n}^2+b_{2k}l_{2n}^2+b_{3k}l_{1n}l_{2n})T_k,$$

$\sigma_{1,2}^0$, σ_3^0 —соответственно нормальные и касательное напряжения в заполнителе, σ_n — напряжения в нитях n-го семейства.

В соответствии с используемыми предположениями полученные решения будут справедливы до таких значений величин нагрузок, при которых будут выполнены неравенства

$$(\sigma_1^0)^2+(\sigma_2^0)^2-\sigma_1^0\sigma_2^0+3(\sigma_3^0)^2\leqslant\sigma^0; \tag{2,5}$$

$$\sigma_n^-\leqslant\frac{E_n}{2H}\sum_{k=1}^{3}(b_{1k}l_{1n}^2+b_{2k}l_{2n}^2+b_{3k}l_{1n}l_{2n})T_k\leqslant\sigma_n^+, \tag{2,6}$$

где σ^0, $\sigma_n^{\pm}$ — пределы текучести (прочности для идеально хрупких материалов) связующего (0) и армирующих (n) элементов при растяжении (+) и сжатии (—).

3. Для оболочек вращения, нагруженных осесимметричными нагрузками и армированных семействами пар нитей таких, что в данной точке на меридиане нити такой пары отклонены на одинаковый угол ψ по обе стороны меридиана, имеем $a_{i3}=0$, $b_{i3}=0$, $i=1, 2$, и, следовательно, из (2,2) — (2,4) получим

$$T_1=\frac{1}{r\sin\varphi}\left[\int_{\varphi_0}^{\varphi}rR_1(p_3\cos\varphi-p_1\sin\varphi)\,d\varphi+c_1\right],\quad T_2=R_2p_3-\frac{R_2}{R_1}T_1; \tag{3,1}$$

$$b_{11}T_1+b_{12}T_2=H\frac{d}{dr}\left[\frac{r}{H}(b_{12}T_1+b_{22}T_2)\right]; \tag{3,2}$$

$$u_1=\sin\varphi\left[\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{R_1}{2H\sin\varphi}\sum_{k=1}^{2}\left(b_{1k}-b_{2k}\frac{R_2}{R_1}\right)T_k\,d\varphi+c_2\right],$$

$$(3,3)$$

$$u_3=-\cos\varphi\left[\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{R_1}{2H\sin\psi}\sum_{k=1}^{2}\left(b_{1k}-b_{2k}\frac{R_2}{R_1}\right)T_kd\varphi+c_2\right]+\frac{R_2}{2H}\sum_{k=1}^{2}b_{2k}T_k;$$

r — текущий радиус оболочки вращения, φ — угол между нормалью к меридиану и осью вращения, c_1, c_2 — константы интегрирования.

Из условия безмоментности (3,2) сразу следует зависимость

$$H(r)=c_3r(b_{12}T_1+b_{22}T_2)e^{I(r)},\quad I(r)=-\int_{r_0}^{r}\frac{b_{11}T_1+b_{12}T_2}{r(b_{12}T_1+b_{22}T_2)}dr, \tag{3,4}$$

где c_3 — константа интегрирования.

При известных геометрии оболочки, характере армирования и характере нагружения эта формула определяет распределение толщины всюду безмоментной оболочки.

Пусть теперь при заданных условиях нагружения и данной геометрии оболочка армирована двумя семействами нитей, составляющих в каждой точке меридиана данный угол $\psi = \mathrm{const}$ с ним. Тогда из (1,1), (1,3)

$$b_{ii} = a_{jj}\Delta^{-1}, \quad b_{12} = -a_{12}\Delta^{-1}, \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad i, j = 1, 2,$$

$$a_{11} = aE(1-\nu^2)^{-1} + 2\omega_1 E_1 (1-\lambda)^2,$$

$$a_{22} = aE(1-\nu^2)^{-1} + 2\omega_1 E_1 \lambda^2, \quad a_{12} = aE\nu(1-\nu^2)^{-1} + 2\omega_1 E_1 \lambda(1-\lambda),$$

$$\lambda = \sin^2\psi.$$

Решая уравнение (3,2) относительно безразмерной функции армирования $2\omega_1 E_1 / aE$, получим

$$2\omega_1 E_1/aE = \exp I_1(r)\,[aEc_4 + Q(1-\nu^2)\,I_2(r)]^{-1} - Q^{-1}, \qquad (3,5)$$

$$I_1(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\Phi_1(r)}{r\Phi_0(r)}\,dr, \quad I_2(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\Phi_2(r)\exp I_1(r)}{r\Phi_0(r)}\,dr, \quad \Phi_0(r) = BT_1 - DT_2,$$

$$\Phi_1(r) = AT_1 - BT_2 + H\frac{d}{dr}\left[\frac{r}{H}(BT_1 - CT_2)\right],$$

$$\Phi_2(r) = KT_2 - \lambda^2 T_1 + H\frac{d}{dr}\left[\frac{r}{H}(MT_2 - KT_1)\right], \quad A = [1-\lambda(1+\nu)]^2,$$

$$B = \nu - \lambda(1-\lambda)(1+\nu)^2, \quad C = [1-\lambda(1+\nu)]^2 - (1-2\lambda)(1-\nu^2),$$

$$D = [\lambda - \nu(1-\lambda)]^2, \; M = (1-\lambda)^2, \; K = \lambda(1-\lambda), \; Q = 1-2\lambda(1-\lambda)(1+\nu),$$

причем величина нагрузок ограничена неравенствами (2,5), (2,6) при $n = 1$. В (3,5) c_4 — константа интегрирования.

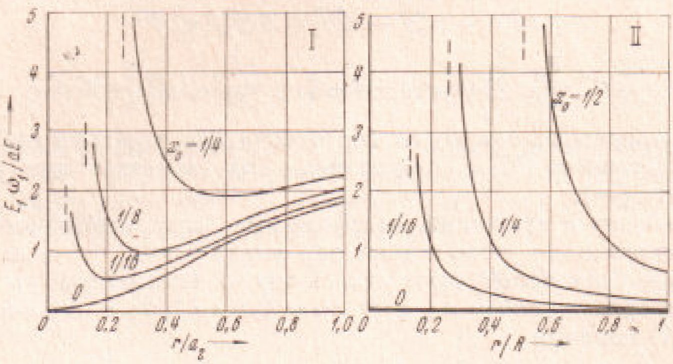

Рис. 1. Зависимость функции армирования $2\omega_1 E_1 / aE$ от безразмерного текущего радиуса $x = r / a_2$. I — эллипсоид вращения (ось вращения совпадает с большой полуосью a_1, отношение главных полуосей $a_1 / a_2 = 2$); II — сфера ($a_1 = a_2 = R$). Штрихами отмечены положения днищ

Выражение (3,5) определяет характер армирования безмоментной оболочки при известных характере нагружения, распределении толщины и геометрии оболочки. В частном случае для оболочек, армированных только в окружном направлении, $\lambda = 1$ и (3,5) принимает вид

$$2\,\frac{\omega_1 E_1}{aE} = \frac{r^{\nu+1}}{H}(T_2 - \nu T_1)\left[aEc_4 + (1-\nu^2)\int\limits_{r_0}^{r}\frac{T_1 r^{\nu}}{H}\,dr\right]^{-1} - 1. \qquad (3,6)$$

На рис. 1 представлена зависимость (3,6) для эллипсоида вращения и сферы, нагруженных внутренним равномерным нормальным давлением. Оболочки либо гладкие в вершинах ($x_0 = 0$), либо имеют плоские абсолютно жесткие днища ($x_0 = {}^1/_{16}, {}^1/_8, {}^1/_4, {}^1/_2$). Для полной сферы получаем $2\omega_1 E_1 / aE \equiv 0$.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
3 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. В. Немировский, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 6 (1969). [2] С. А. Амбарцумян, Теория анизотропных оболочек, М., 1961. [3] В. В. Новожилов, Теория тонких оболочек, 1962.