Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 2

УДК 519.3 : 51 : 62-50

МАТЕМАТИКА

В. И. ПЛОТНИКОВ

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ОБЩЕГО ВИДА

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 6 I 1971)

В заметке будет сформулирована единая (унифицированная) схема доказательства необходимых критериев оптимальности для широкого класса задач оптимизации объектов с распределенными параметрами, описываемых нелинейными функциональными системами эволюционных и стационарных уравнений математической физики, включающего в себя как частный случай все важнейшие классы задач, связанных с нелинейными системами параболического, гиперболического, эллиптического типов, а также системами типа Дарбу — Гурса, интегральными, смешанными различных типов и т. д. При этом в формулировке задач будет фигурировать набор естественных ограничений, вытекающих из физической сути задач, без каких бы то ни было упрощающих предположений. Будет рассмотрен общий минимаксный случай.

Необходимо отметить, что методика, применяемая в работах, посвященных системам с распределенными параметрами (см., например, [1-7]), весьма специфична и не поддается унификации и результаты работ по совокупности далеко не исчерпывают решения проблем в целом. Предлагаемая нами новая методика изучения задач оптимизации допускает естественную унификацию (на достаточно широкий класс задач), причем, поскольку системы с сосредоточенными параметрами есть частный случай систем с распределенными параметрами, то приводимая методика дает единый подход к решению задач оптимизации обоих классов.

1. Законы движения и управления систем. Ограничивающие и минимизируемые функционалы. Закон движения объекта будет задаваться некоторыми нелинейными операторными соотношениями типа

а) $\mathbf{F}(P, t, \{L_k\}, v)\,|_{Q(T)} = 0$,

б) $\mathbf{F}_\nu(P, t, \{L_k^\nu\}, v_\nu)\,|_{Q_\nu(T)} = 0$,

в) $\mathbf{N}(P, \{M_k\}, w)\,|_{t=0} = 0$,

где $Q(T) = \Omega \times (0, T)$ — основной цилиндр, Ω — область изменения распределенного параметра; $P \in \Omega$, а T — конечный момент процесса, который будем предполагать фиксированным; $Q_\nu(T) = \Omega_\nu \times (0, T)$ — граничные многообразия, которые будем считать гладкими, причем операторы $L_k(P, t, D^\alpha(u))$, $L_k^\nu(P, t, D^{\nu\alpha}(u))$, $M_k(P, D^\alpha(u))$ могут быть и нелинейными, однако имеющими непрерывный дифференциал Фреше по $D^\alpha u$, а функции F, F_ν, N обозначают обычные функции или операторы-суперпозиции, заданные на областях определения аргументов P, t, $\{L_k\}$, $\{L_k^\nu\}$, $\{M_k\}$, v, v_ν, w, непрерывно дифференцируемые по компонентам векторов $\{L_k\}$, $\{L_k^\nu\}$, $\{M_k\}$. Здесь условия б) играют роль граничных условий, если в а) явно входят дифференциальные операторы, а в) — роль начальных условий, $u(P, t)$ — траектория объекта.

Функционалом качества процесса может служить произвольный нелинейный функционал типа

$$I_0[\mathbf{v}, \mathbf{v}_\nu, \mathbf{w}] = \max_{\delta \in \Delta} \Phi_0(\delta, \{L_k^0\}, v, v_\nu, w),$$

где функционал Φ_0 дифференцируем по Фреше (по набору $\{L_k^0\}$), а Δ — область изменения параметра δ (Δ может быть, например, метрическим бикомпактом, что чаще всего наблюдается на практике). Что касается ограничивающих функционалов $I_j(\delta, v, v_\nu, w)$, то будем также предполагать, что они имеют такую же структуру, что и рассмотренный выше функционал качества.

Пусть ограничения имеют вид

$$I_j(\delta, v, v_\nu, w) = \Phi_j(\delta, \{L_k\}, v, v_\nu, w) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n;$$
$$I_j(v, v_\nu, w) = \Phi_j(\{L_k\}, v, v_\nu, w) = 0, \quad j = (n+1), \ldots, (n+m). \quad (2)$$

Управляющие функции $\mathbf{v}$, $\{\mathbf{v}_\nu\}$, $\mathbf{w}$ со значениями из областей управления V, $\{V_\nu\}$, W, удовлетворяющие (1) и (2), будем называть допустимыми. Оптимальная задача состоит в определении таких допустимых элементов $(\mathbf{v}_0, \{\mathbf{v}_{0\nu}\}, \mathbf{w}_0)$, которые реализовали бы $\min I_0$ в классе всех допустимых управлений $(\mathbf{v}, \{\mathbf{v}_\nu\}, \mathbf{w})$. Здесь сформулирована простейшая задача с фиксированным временем процесса $T > 0$ без ограничений на текущие фазовые (конфигурационные) координаты. Общий случай значительно сложнее и будет рассмотрен особо. Для определения оптимальных элементов $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_{0\nu}, \mathbf{w}_0)$ сформулируем и кратко докажем необходимый критерий, которому должны удовлетворять эти элементы и который при некоторых добавочных предположениях окажется также и достаточным.

2. Унифицированная формула для приращения функционалов Φ_0 или Φ_j. Каково бы ни было семейство вариант $\{\mathbf{v}(\varepsilon^{(1)}), \{\mathbf{v}_\nu(\varepsilon_\nu^{(2)})\}, \mathbf{w}(\varepsilon^{(3)})\}$, удовлетворяющих условию включения $\mathbf{v}(\varepsilon^{(1)}) \in V$, $\mathbf{v}_\nu(\varepsilon_\nu^{(2)}) \in V_\nu$, $\mathbf{w}(\varepsilon^{(3)}) \in W$, и таких, что при любых $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon^{(3)}$ траектории $u(P, t)$ однозначно определены, существуют функции $\mathbf{u}_j^*(P, t, \varepsilon) \in L_2(Q)$, $\mathbf{u}_{\nu j}^*(P, t, \varepsilon) \in L_2(Q_\nu)$, $\mathbf{u}_j^{**}(P, \varepsilon) \in L_2(\Omega)$, $\varepsilon = \{\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(3)}\}$, для которых справедлива формула

$$\Delta\Phi_j(\mathbf{v}_\varepsilon, \{\mathbf{v}_{\nu\varepsilon}\}, \mathbf{w}_\varepsilon) \equiv \Phi_j(v_{\varepsilon(1)}, \{v_{\nu\varepsilon(2)}\}, w_{\varepsilon(3)}) - \Phi_j(v_0, \{v_{\nu 0}\}, w_0) =$$
$$= \int\limits_Q (\mathbf{u}_j^*(P, t, \varepsilon), \delta_v \mathbf{F})\, dQ + \sum_\nu \int\limits_{Q_\nu} (\mathbf{u}_{\nu_j}^*(P, t, \varepsilon), \delta_v \mathbf{F}_\nu)\, dQ_\nu +$$
$$+ \int\limits_\Omega (\mathbf{u}_j^{**}(P, \varepsilon), \delta_w \mathbf{N})\, d\Omega + \delta_{v, v_\nu, w}\Phi_j,$$

где $\delta_{v(\varepsilon)}\mathbf{F}[u(P)]$ обозначает приращение функции $F(P, t, \{L_k\}, v)$ и т. д., вызванное лишь управлением $v_\varepsilon(P, t)$ (при фиксированных значениях операторов $L_k(\mathbf{u}_0, \ldots)$). Аналогичный смысл имеет член $\delta_{v, v_\nu, w}\Phi_j$, т. е.

$$\delta_{v, v_\nu, w}\Phi_j = \Phi_j(\delta, \{L_k\}, v_\varepsilon, v_{\nu\varepsilon}, w_\varepsilon) - \Phi_j(\delta, \{L_k\}, v_0, v_{\nu 0}, w_0).$$

При выводе формулы приращения $\Delta\Phi_j$ важную роль играют априорные оценки приращений Δu (см. [8]) и теоремы вложения функциональных пространств (см. [9, 10]).

3. В зависимости от характера экстремума функционала I_0 (локального, локального в среднем или глобального), а также от функциональной структуры управляющих функций $\{\mathbf{v}(P, t), \{\mathbf{v}_\nu(P, t)\}, \mathbf{w}(P)\}$ для доказательства необходимых критериев оптимальности можно вводить те или иные семейства вариант $\{\mathbf{v}_{\varepsilon^{(1)}}, \{\mathbf{v}_{\nu\varepsilon_\nu^{(2)}}\}, \mathbf{w}_{\varepsilon^{(3)}}\}$ (например, классические [11], импульсные, комбинированные (см. [12]), варианты сдвига [13] и т. д.). Наиболее важным требованием, предъявляемым к таким семействам, является требование непрерывности этого семейства на нулевом (экстремальном) элементе. Это свойство непрерывности существенным образом облегчает доказательство существования первых вариаций функционалов Φ_0 и Φ_j, если исходить из формул для приращения $\Delta\Phi_j$. Под первой вариацией здесь понимается предел $\Delta\Phi_j / \sigma$ при $\sigma \to 0$, причем $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon^{(3)}$ связаны с σ некоторыми гомеоморфизмами, которые мы здесь уточнять не будем.

4. Можно показать, что при любом способе варьирования легко ввести систему линейных параметров таким образом, что при всевозможных наборах элементов, от которых будет зависеть первая вариация функционала, множество этих вариаций будет выпуклым конусом в пространстве значений функционалов и их первых вариаций, к конструкции которого мы перейдем.

5. Считая зависимость функционала Φ_0 или Φ_j от δ непрерывной, заметим, что вектор с компонентами $\{\Phi_0(\delta);\ \Phi_j(\delta),\ j = 1, \dots, n;\ \Phi_j,\ j = (n+1), \dots, (n+m)\}$ можно рассматривать как «точку» в многократном топологическом произведении пространства R и C_0, которое будем обозначать символом $\mathscr{W}$:

$$\mathscr{W} = \{\underbrace{C_0 \times C_0 \times \dots \times C_0}_{(n+1)\ \text{раз}} \times \underbrace{R_1 \times R_1 \dots \times R_1}_{m\ \text{раз}}\},$$

где $C_0 = C_0(\Delta)$ — пространство непрерывных функций, определенных на бикомпакте Δ с равномерной метрикой: метрика в R_1 — естественная. Предположим далее, что производные Фреше $\partial\Phi(\delta) / \partial L_k$ непрерывны на бикомпакте Δ, можно доказать, что первые вариации $\delta\Phi_0(\delta)$ и $\delta\Phi_j(\delta)$, $j = 1, \dots, n$, также непрерывны на Δ. Следовательно, вектор с компонентами $\delta\Phi_0(\delta)$, $\delta\Phi_j(\delta)$, $j = 1, \dots, n$, $\delta\Phi_j$, $j = (n+1), \dots, (n+m)$, как и значения соответствующих функционалов, можно рассматривать как «точку» пространства $\mathscr{W}$.

6. Без ограничения общности можно считать, что $\Phi_0(\eta, v_0, \{v_{v0}\}, w_0) = 0$, $\Phi_j(\eta, v_0, \{v_{v0}\}, w_0) = 0$ для всех $\eta \in \Delta$ и $j = 1, \dots, (n+m)$. Предположим теперь, что при всевозможных наборах вспомогательных параметров множество первых вариаций функционалов есть выпуклый конус (как уже отмечалось, этого всегда можно добиться) в пространстве $\mathscr{W}$; оказывается, что при любом способе варьирования этот конус может быть отделен нетривиальным линейным ограниченным функционалом $f \in \mathscr{W}^*$ ($\mathscr{W}^*$ означает сопряженное пространство) от отрицательного октанта в пространстве $\widetilde{\mathscr{W}} \subset \mathscr{W}$, определяемом соотношениями $\Phi_j \equiv 0$, $j = (n+1), \dots, (n+m)$.

Доказательство этого факта нетривиально. Отметим лишь, что в его основе лежит теорема об инвариантности индекса вращения непрерывного семейства векторов, а также теорема Дьедонне [13] об отделимости выпуклых непересекающихся множеств из $\mathscr{W}$, одно из которых имеет внутренние точки в топологии минимального несущего подпространства $\widehat{\mathscr{W}} \subset \mathscr{W}$, $\widehat{\mathscr{W}} = \widetilde{\mathscr{W}}$. В данном случае такими множествами будут служить конус первых вариаций и отрицательный октант, определяемый условиями

$$\Phi_j \equiv 0, \quad j = (n+1), \dots, (n+m); \quad \Phi_j \leqslant 0,\ j = 0, \dots, n.$$

Последний, очевидно, имеет внутренние точки относительно топологии несущего подпространства.

Теорема об индексе вращения используется для доказательства непересекаемости упомянутых конуса вариаций и отрицательного октанта.

7. В силу теоремы Рисса [13] об общей форме линейного непрерывного функционала над $\mathscr{W}$ существует набор неотрицательных регулярных счетно-аддитивных функций множества (мер), а также набор констант произвольного знака (причем совокупность обоих этих наборов как векторная мера нетривиальна), обладающих, в силу разделяющего характера функционала, следующим свойством:

$$\int_\Delta \delta I_0(\delta)\, d\mu_0(\delta) + \sum_{j=1, \dots, n} \int_\Delta \delta I_j(\delta)\, d\mu_j(\delta) + \sum_{j=n+1}^{n+m} l_j \delta I_j \geqslant 0,$$

где интеграл понимается в смысле Радона — Стильтьеса.

Это неравенство справедливо для любых наборов первых вариаций $\delta I_0(\delta)$; $\delta I_j(\delta)$, $j = 1, \dots, n$; δI_j, $j = (n+1), \dots, (n+m)$. Из него могут быть получены все важнейшие необходимые условия оптимальност[illegible] ментов $\{v_0, \{v_{\nu 0}\}, w_0\}$, включая соотношения принципа максимума, кла[illegible] ческие условия Эйлера — Лагранжа, а также и многие смешанные со[illegible] шения (в зависимости от способа варьирования и характера экстрему[illegible]

8. Поскольку набор регулярных мер, о которых говорилось в п. 7, [illegible] деляется, вообще говоря, неоднозначно, можно доказать, что всегда су[illegible] вует набор упомянутых мер, сосредоточенных лишь на бикомпактах: $\Delta_0 = \{\delta\colon \Phi_0(\delta, \ldots, v_0, \{v_{\nu 0}\}, w_0) = 0\}$, $\Delta_j = \{\delta\colon \Phi_j(\delta, \ldots, v_0, \{v_{\nu 0}\}, w_0 =$ [illegible]

Горьковский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступил[illegible]
17 XI 19[illegible]

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Т. К. Сиразетдинов, Тр. Унив. дружбы народов им. П. Лумумбы, [illegible] 1968. [2] А. И. Егоров, Матем. сборн., 69 (III), № 3 (1966). [3] A. I. Eg[illegible] Math. Syst. Theory, 1, № 4, 347 (1967). [4] Ю. В. Егоров, Матем. сборн., 64, [illegible] (1964). [5] А. Г. Бутковский, Теория оптимального управления системами с [illegible] пределенными параметрами, «Наука», 1965. [6] J. L. Lions, Atti Accad. naz. L[illegible] Rend. Cl. sci. fis., math. e natur., 44, № 1, 34 (1968). [7] J. L. Lions, Atti Accad. [illegible] Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 44, № 2, 151 (1968). [8] В. И. Плотни[illegible] ДАН, 165, № 1 (1965). [9] В. И. Плотников, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, [illegible] 743 (1968). [10] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Урал[illegible] ва, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, «Наука», [illegible] [11] А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин, Журн. вычислит. матем. и матем. [illegible] 5, № 3 (1965). [12] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский и др., Математич[illegible] теория оптимальных процессов, М., 1961. [13] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, Лин[illegible] ные операторы, ИЛ, 1962. [14] В. И. Плотников, ДАН, 175, № 6 (1967).