Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 2

УДК 517.5 *МАТЕМАТ*

В. Г. ХРЫПТУН

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 12 I 1971)

1. Пусть $M_i(k)$, $i=1, 2, \ldots, n$; $k=0, 1, 2, \ldots,$ — логарифмич выпуклые по k последовательности положительных чисел (т. е. $\ln M_i(k)$ — выпуклые по k последовательности), удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_i(k-1)/M_i(k) = \infty \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

и $C_n\{M_i(k)\}$ — класс тех функций $f(x)$ от n вещественных переме $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые бесконечно дифференцируемы в n-мер кубе $\Delta = \{-1 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i=1, 2, \ldots, n\}$ и вместе со всеми своими ными производными удовлетворяют неравенствам

$$\sup_{\Delta} |D_1^{r_1} D_2^{r_2} \ldots D_n^{r_n} f(x)| \leqslant N \prod_{i=1}^{n} C_i^{r_i} M_i(r_i),$$

где $D_i = \partial / \partial x_i$, а постоянные N и C_i — свои для каждой функции f Согласно результатам ([2], [3]), класс функций $C_n\{M_i(k)\}$ является квази литическим, т. е. в этом классе нет отличной от тождественного нуля фу ции, равной нулю вместе со всеми своими частными производными в которой точке $a \in \Delta$.

В этой заметке доказывается

Теорема. *Всякая бесконечно дифференцируемая в n-мерном кубе функция $f(x)$ является суммой 2^n функций $f_s(x)$ $(s=1, 2, \ldots,$ каждая из которых принадлежит своему квазианалитическому кл функций $C_n\{M_{i,s}(k)\}$, который определяется совокупностью логариф чески выпуклых по k последовательностей положительных чисел $M_{i,s}(k)$ $i=1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющих условию* (1).

Эта теорема обобщает известную теорему С. Мандельбройта (1), до занную для функций одной независимой переменной, и совпадает с следней при $n=1$. Очевидно, что теорема выполняется для бесконе дифференцируемых функций, заданных в любом n-мерном параллел педе $g = \{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i=1, 2, \ldots, n\}$, где a_i и b_i — константы. Из ремы вытекает, что для каждой функции $f(x)$, бесконечно дифференци мой в замкнутой области G, являющейся суммой конечного числа пар лелепипедов вида g, можно указать такую совокупность последовател стей положительных чисел $M_i^1(k)$, $i=1, 2, \ldots, n$, $k=0, 1, 2, \ldots,$ все частные производные функции $f(x)$ будут удовлетворять в област неравенствам (2) с последовательностями чисел $M_i^1(k)$.

2. Доказательство теоремы проведем с помощью лемм 1, 2, 3, при э существенным образом используются результаты ([1]).

Бесконечно дифференцируемая в области Δ функция $f(x)$ разлагае в n-кратный ряд по многочленам Чебышева $T_k(x_i) = \cos(k \arccos x_i)$ ви

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu a_\nu T_\nu(x),$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ и каждый индекс $\nu_i \in \nu$ меняется от нуля до бесконечности независимо от остальных индексов,

$$T_\nu(x) = T_{\nu_1}(x_1) T_{\nu_2}(x_2) \ldots T_{\nu_n}(x_n),$$

a_ν — коэффициенты Фурье функции $\psi(z) = f(\cos z_1, \cos z_2, \ldots, \cos z_n)$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $\lambda_\nu = 2^{-q}$ и q — количество равных нулю индексов $\nu_i \in \nu$. Пусть $N_i(k) = \sup\limits_{\Delta} |D_i^{(k)} f(x)|$,

$$S_i(r) = \max_{1 \leqslant k \leqslant r} r^k / N_i(r) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Лемма 1. *Коэффициенты a_ν ряда* (3) *удовлетворяют каждому из следующих n неравенств:*

$$|a_\nu| \leqslant [S_i(\nu_i / a)]^{-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

где для каждого i числа $\nu_i \geqslant a = 3 \cdot 2^n$ и числа $\nu_s \geqslant 0$ для $s \neq i$.

Доказательство. Пусть $\varphi_{i,p}(x) = D_i^p f(x)$, $\varphi_{i,0}(x) = f(x)$, $\psi_{i,p}(z) = \varphi_{i,p}(\cos z_1, \ldots, \cos z_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Очевидно, $(\partial / \partial z_i) \times \psi_{i,p}(z) = -\sin z_i \psi_{i,p+1}(z)$. Подставляем в левую часть этого равенства производную по z_i ряда Фурье функции $\psi_{i,p}(z)$, а в правую часть равенства ряд Фурье для функции $\psi_{i,p+1}(z)$, умноженный на $-\sin z_i$, и находим рекуррентные формулы, связывающие коэффициенты Фурье функций $\psi_{i,p}(z)$ и $\psi_{i,p+1}(z)$. С помощью этих формул получаем неравенства (5) таким же образом, как это сделано в работе ([1]), § 1 (см. также ([2]), стр. 238).

Лемма 2. *Для каждой функции $S_i(r)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, можно указать монотонно возрастающую до бесконечности последовательность чисел $t_{i,q}$, $q = 0, 1, 2, \ldots$, и две положительные функции $T_{i,1}(r)$ и $T_{i,2}(r)$, обладающие следующими свойствами:*

$c^{-1} T_{i,1}(r^{2n}) \leqslant S_i(r)$ *на отрезках* $t_{i,2q} \leqslant r^{2n} < t_{i,2q+1}$, $q = 0, 1, \ldots$.

$c^{-1} T_{i,2}(r^{2n}) \leqslant S_i(r)$ *на отрезках* $t_{i,2q+1} \leqslant r^{2n} < t_{i,2q+2}$, $q = 0, 1, \ldots$

(c — константа), и

$$\int_1^\infty \ln T_{i,s}(r)\, dr / r^2 = \infty \quad (s = 1, 2;\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказательство проводится тем же способом, что и доказательство формул (7)—(13) работы ([1]), только число r_0 (см. начало § 2, ([1])) подбирается так, чтобы $n(r_0) > 2n$ и $\ln S(r_0) > 0$.

Последовательности положительных чисел $M_{i,1}(k)$ и $M_{i,2}(k)$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 0, 1, \ldots$, построенные по формулам

$$M_{i,s}(k) = \sup_{r \geqslant 1} r^k / T_{i,s}(r) \quad (s = 1, 2), \tag{6}$$

являются логарифмически выпуклыми по k и для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ удовлетворяют условию (1) (см. ([1]) и ([2]), стр. 24, 29).

Обозначим через $\delta_{i,1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, множество всех чисел t, удовлетворяющих неравенствам $t_{i,2q} \leqslant (t / a)^{2n} < t_{i,2q+1}$, $q = 0, 1, 2, \ldots$, а через $\delta_{i,2}$ — множество всех чисел t, удовлетворяющих неравенствам $t_{i,2q+1} \leqslant (t / a)^{2n} < t_{i,2q+2}$, $q = 0, 1, 2, \ldots$. По последовательности a_ν коэффициентов ряда (3) строим последовательности чисел $b_{\nu,2}$ и $b_\nu(i_1, i_2, \ldots, i_s)$, $s = 1, 2, \ldots, n$, следующим образом: $b_{\nu,2} = a_\nu$, если каждый индекс $\nu_i \in \nu$ принадлежит соответственно множеству $\delta_{i,2}$, и $b_{\nu,2} = 0$, если хотя бы один из индексов $\nu_i \overline{\in} \delta_{i,2}$; $b_\nu(i_1, i_2, \ldots, i_s) = a_\nu$, если каждый индекс $\nu_i \in \nu$ принадлежит соответственно множеству $\delta_{i,1}$ для значений $i = i_1, i_2, \ldots, i_s$ и каждый индекс $\nu_i \in \delta_{i,2}$ для значений $i \neq i_1, i_2, \ldots, i_s$,

$b_\nu(i_1, \ldots, i_s) = 0$ в остальных случаях. Обозначим

$$f_2(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu b_{\nu,2} T_\nu(x), \quad f(i_1, i_2, \ldots, i_s; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu b_\nu(i_1, i_2, \ldots, i_s) T_\nu(x)$$

и представим функцию (3) в следующем виде:

$$f(x) = f_2(x) + \sum_{s=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n} f(i_1, \ldots, i_s; x).$$

Лемма 3. *Формула (8) дает искомое представление бесконечно дифференцируемой в области Δ функции $f(x)$ в виде суммы 2^n функций, принадлежащих следующим квазианалитическим классам функций $f_2(x) \in C_n\{M_{i,2}(k)\}$, $f(i_1, \ldots, i_s; x) \in C_n\{M_i(k)\}$, где $M_i(k) = M_{i,1}(k)$ для $i = i_1, i_2, \ldots, i_s$ и $M_i(k) = M_{i,2}(k)$ для $i \neq i_1, i_2, \ldots, i_s$, где последовательности $M_{i,s}(k)$ определены формулами (6).*

Доказательство. Покажем, что функция

$$f(1; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu b_\nu(1) T_\nu(x)$$

принадлежит классу функций $C_n\{M_i(k)\}$, где $M_1(k) = M_{1,1}(k)$ и $M_i(k) = M_{i,2}(k)$ для $i = 2, 3, \ldots, n$. Представляем функцию (9) в виде

$$f(1; x) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n} \varphi(j_1, j_2, \ldots, j_k; x),$$

где $\varphi(x)$ — сумма тех членов ряда (9), у которых все индексы $\nu_i \leqslant a - 1$, а $\varphi(j_1, \ldots, j_k; x)$ — сумма тех членов ряда (9), у которых индексы $\nu_i \geqslant a$ для $i = j_1, j_2, \ldots, j_k$ и индексы $\nu_i \leqslant a - 1$ для $i \neq j_1, j_2, \ldots, j_k$. Функция $\varphi(x)$ является многочленом по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и принадлежит любому квазианалитическому классу функций $C_n\{M_i(k)\}$. Займемся функциями $\varphi(j_1, j_2, \ldots, j_k; x)$. Перемножаем неравенства (5) для значений $i = j_1, j_2, \ldots, j_k$ и получаем следующие оценки для коэффициентов b_ν (1) рядов, представляющих эти функции:

$$|b_\nu(1)| \leqslant |a_\nu| \leqslant \prod_{p=1}^{k} [S_{j_p}(\nu_{j_p}/a)]^{-1/k}.$$

Поскольку функция $f(1; x)$ построена таким образом, что коэффициенты b_ν (1) ряда (9) отличны от нуля только тогда, когда $\nu_i \in \delta_{1,1}$ и $\nu_i \in \delta_{i,2}$ для $i = 2, 3, \ldots, n$, то, согласно лемме 2, получаем такие неравенства для функций $S_i(r)$, содержащихся в формуле (11):

$$S_1(\nu_1/a) > c(\nu_1/a)^{2n} T_{1,1}[(\nu_1/a)^{2n}],$$
$$S_i(\nu_i/a) > c(\nu_i/a)^{2n} T_{i,2}[(\nu_i/a)^{2n}] \quad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

где $\nu_i \geqslant a$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Пользуясь неравенствами (11) и (12), оцениваем частные производные функций $\varphi(j_1, j_2, \ldots, j_k; x)$ и получаем произведение k рядов такого вида, как ряд (17) из (1). Каждый из таких рядов оцениваем методом работы ([1]) и приходим к выводу, что функция $f(1; x)$ принадлежит указанному выше квазианалитическому классу функций. Аналогично доказывается, что и все остальные функции (8) принадлежат указанным в лемме классам функций.

Теорема доказана.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
4 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Mandelbrojt, Acta Math., 72, 15 (1940). [2] С. Мандельбройт, Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, ИЛ., 1955. [3] Л. И. Ронкин, ДАН, 146, № 3, 546 (1962).