Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 3

УДК 519.3+512.25 *МАТЕМАТИКА*

Н. Н. АСТАФЬЕВ

ОБ ОБРАТНЫХ ТЕОРЕМАХ ОБОБЩЕННОЙ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЗАДАЧАХ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 27 I 1971)

В работе формулируются условия, обеспечивающие выполнение основных соотношений обратной теоремы обобщенной двойственности в выпуклом программировании; при этом в основу доказательств, равным образом и самого подхода к обобщенной двойственности, положен аппарат бесконечных систем линейных неравенств.

1. Пусть L — линейное вещественное пространство, L^* — пространство всех линейных функционалов;

$$h_\alpha(x) \leqslant 0 \quad (\alpha \in I) \tag{1,1}$$

— система однородных линейных неравенств над L; здесь I — произвольное множество индексов, $h_\alpha \in L^*$. Обозначим через $K_{1,1}$ конус в L^*, порожденный элементами h_α $(\alpha \in I)$; через $D[K_{1,1}]$ — пересечение всех множеств, содержащих $K_{1,1}$ и задаваемых линейными (относительно $h \in L^*$) неравенствами $x(h) \leqslant 0$, где $x \in L$.

Система (1,1) называется полиэдрально замкнутой, если $K_{1,1} = D[K_{1,1}]$ (1).

Система линейных неравенств над L вида

$$h_\alpha(x) - \beta_\alpha \leqslant 0 \quad (\alpha \in I),$$

где β_α — действительные числа, называется полиэдрально замкнутой, если полиэдрально замкнута система линейных (относительно (x, t)) неравенств

$$h_\alpha(x) - \beta_\alpha t \leqslant 0 \quad (\alpha \in I),$$
$$-t \leqslant 0$$

над пространством $L \times R^1$ (1).

Сформулируем в L задачу выпуклого программирования: найти

$$v = \inf \{f(x): \ g_i(x) \geqslant 0 \ (i = 1, \ldots, m), \ x \in M\}, \tag{1,2}$$

где $f(x)$, $-g_i(x)$ $i = 1, \ldots, m$, — выпуклые функционалы, определенные на L, M — не пустое выпуклое множество в L.

С (1,2) свяжем задачу: найти

$$v' = \inf \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i) \tag{1,3}$$

при $$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i g(x_i) \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, k),$$

где $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))$, $x_i \in M$, $k = 1, 2, \ldots$; подчеркнем, что операция inf в (1,3) берется по всем $x_i \in M$ и всем натуральным k.

Легко усмотреть, что (1,2) и (1,3) связаны соотношением

$$v = v'. \tag{1,4}$$

Задача (1,3) является двойственной для следующей линейной (относительно (z, u)) программы с бесконечным числом ограничений ([1, 2]): найти

$$\bar{v} = \sup \{z\colon\ z \leqslant f(x) - (g(x), u),\ u \geqslant 0\ (x \in M)\}, \tag{1,5}$$

здесь $(g(x), u)$ — скалярное произведение векторов $u \in R^m$ и $g(x)$.

Последняя задача эквивалентна задаче: найти

$$\bar{v} = \sup_{u \geqslant 0} \inf_{x \in M} \left[f(x) - \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) \right]. \tag{1,6}$$

В ([3]) задача (1,6) названа двойственной к (1,2).

Теорема 1 (обратная теорема обобщенной двойственности). *Пусть в* (1,5) $\bar{v}$ — *конечно и выпуклая оболочка* со N *множества* $N = \{l \in R^{m+1}\colon l = (g(x), -f(x)), x \in M\}$ замкнута.

Тогда задача (1,2) *разрешима в некоторой точке* x_0, *при этом* $f(x_0) = \bar{v}$.

Доказательство. Из конечности $\bar{v}$ следует, что неравенство $z \leqslant \bar{v}$ является следствием системы неравенств, являющихся ограничениями задачи (1,5), а потому согласно лемме 7,1 из ([1]) неравенство $z - \bar{v}t \leqslant 0$ является следствием системы линейных (относительно (z, u, t)) неравенств

$$z + (g(x), u) - f(x)t \leqslant 0 \quad (x \in M).$$
$$-u \leqslant 0,\ -t \leqslant 0. \tag{1,7}$$

Положим $K_1 = \{(z, u, t)\colon z + (g(x), u) - f(x)t \leqslant 0 \quad \forall x \in M\}$, $K_2 = \{(z, u, t)\colon u \geqslant 0, t \geqslant 0\}$. Тогда, если $(z, u, t) \in K_1 \cap K_2$, то $z - \bar{v}t \leqslant 0$. Легко видеть, что существует $(\bar{z}, \bar{u}, \bar{t}) \in K_2$, для которого $\bar{z} + (g(x), \bar{u}) - f(x)\bar{t} < 0 \quad \forall x \in M$, т. е. $(\bar{z}, \bar{u}, \bar{t})$ — внутренняя точка K_1, и потому согласно лемме 3.6 из ([4]) $(1, 0, -\bar{v}) \in K_1^* + K_2^*$, т. е. существуют $\lambda_i \geqslant 0$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$, при которых неравенство $z + (\tilde{u}, u) + (\lambda_0 - \bar{v})t \leqslant 0$ есть следствие системы

$$z + (g(x), u) - f(x)t \leqslant 0 \quad (x \in M), \tag{1,8}$$

где $\tilde{u}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. В силу теоремы 7.1 из ([1]) $(1, \tilde{u}, \lambda_0 - \bar{v}) \in D[K_{1,8}]$; здесь конусу $K_{1,8}$ придается тот же смысл, что и конусу $K_{1,1}$, но применительно к системе неравенств (1,8). Для конечномерного пространства R^{m+2} конус $D[K_{1,8}]$ совпадает с топологическим замыканием $\bar{K}_{1,8}$, поэтому $(1, \tilde{u}, \lambda_0 - \bar{v}) \in D[K_{1,8}] = \bar{K}_{1,8}$. Тогда существует $\{a_k = (\gamma_k, u_k, \alpha_k) \in K_{1,8}\} \to (1, \tilde{u}, \lambda_0 - \bar{v})$ при $k \to +\infty$. Положим $\bar{a}_k = (1, u_{k/\gamma_k}, \alpha_{k/\gamma_k})$. Очевидно, $\{\bar{a}_k\} \to (1, \tilde{u}, \lambda_0 - \bar{v})$ и $\bar{a}_k = \sum\limits_{i=1}^{m+3} \gamma_i^k (1, g(x_i^k), -f(x_i^k))$, отсюда $\bar{a}_k \in \operatorname{co} N$, а потому и $(1, \tilde{u}, \lambda_0 - \bar{v}) \in \operatorname{co} N$. Следовательно, существуют $x_i^0 \in L, \lambda_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m+3} \lambda_i = 1$, что $(\tilde{u}, \lambda_0 - \bar{v}) = \sum\limits_{i=1}^{m+3} \lambda_i (g(x_i^0), -f(x_i^0))$.

Положим $x_0 = \sum\limits_{i=1}^{m+3} \lambda_i x_i^0$. Тогда $(g(x_0), -f(x_0)) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{m+3} \lambda_i (g(x_i^0), -f(x_i^0)) = (\tilde{u}, \lambda_0 - \bar{v})$, т. е. $g(x_0) \geqslant 0$, $f(x_0) \leqslant \bar{v} - \lambda_0 \leqslant \bar{v}$. Но так как из допустимости вектора x_0 для задачи (1,2) (т. е. $g(x_0) \geqslant 0$) автоматически следует $f(x_0) \geqslant \bar{v}$, то отсюда получается как соотношение $f(x_0) = \bar{v}$, так и оптимальность x_0 в задаче (1,2).

Замечание. Доказанная теорема включает, в частности, утверждение 5.7 из ([5]), при этом в отличие от последнего она охватывает случай линейных программ.

Теорема 2. *Пусть в* (1,5) $\bar{v}$ *конечно. Если система линейных (относительно* (z, u)) *неравенств*

$$z + (g(x),\ u) \leqslant f(x) \qquad (x \in M)$$

полиэдрально замкнута, то задача (1,2) *разрешима в некоторой точке* x_0, *при этом* $f(x_0) = \bar{v}$.

Последовательность $\{x_n\} \subset L$ называют обобщенным планом задачи (1,2), если существует $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n)$ и для некоторой последовательности $\{\varepsilon_n\}$, стремящейся к нулю, выполняются $\varepsilon_n + g_i(x_n) \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Задаче (1,2) поставим в соответствие задачу оптимизации на обобщенных планах ([3]), а именно: найти

$$v_1 = \inf \{\lim f(x_n) : \ \{x_n\} \in \Omega\}, \tag{1,9}$$

где Ω — множество обобщенных планов задачи (1,2).

Теорема 3. *Пусть в* (1,5) $\bar{v}$ *конечно.*

Тогда множество Ω *обобщенных планов задачи* (1,2) *не пусто и* $v_1 = \bar{v}$.

2. Пусть в постановке задачи (1,2) $M = L$. Введем для ее обозначения символ C. В случае дифференцируемости функций, определяющих задачу C, наиболее естественной схемой формирования задачи C^*, двойственной к C, автоматически порождающей двойственность в линейном программировании, является

$$C \xrightarrow{(1)} L_p(C) \xrightarrow{(2)} L_p^*(C) \xrightarrow{(3)} L_x^*(C) \overset{\text{опр}}{=} C^*; \tag{$*$}$$

здесь переход (1) означает линеаризацию задачи C в точке $p \in L$; (2) — переход от задачи линейного программирования $L_p(C)$ к двойственной; (3) означает формальную замену p на свободную переменную $x \in L$. Схема $(*)$ может быть обобщена на недифференцируемый случай посредством линеаризации через субградиенты функций $f(x)$, $g_1(x), \ldots, g_m(x)$ по произвольной системе точек. Тогда соответствию (1) в схеме $(*)$ будет соответствовать переход к задаче: найти

$$\begin{gathered}\inf \{h(x - y_0) + f(y_0) \ : \ h_i^k(x - y_i^k) + g_i(x_i^k) \geqslant 0 \\ (h \in \partial f(y_0), \quad h_i^k \in \partial g_i(y_i^k); \quad i = 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, k_i)\},\end{gathered} \tag{2,1}$$

где y_0, $\{y_i^k\}$ — векторы-параметры, $\partial f(y_0) \overset{\text{опр}}{=} \{h \in L^* : h(x - y_0) \leqslant f(x) - f(y_0) \quad \forall x\}$ — множество субградиентов выпуклой функции $f(x)$ в точке y_0; для вогнутой функции $g_i(x)$ соответственно $\partial g_i(y) \overset{\text{опр}}{=} \{h \in L^*: h(x - y) \geqslant g_i(x) - g_i(y) \quad \forall x \in L\}$.

Дальнейшее следование схеме $(*)$ приводит к задаче C^*: найти

$$\overline{w} = \sup \left[f(x) - h(x) - \sum_{i=1,\, k=1}^{m,s} u_i^k (g_i(x_i^k) - h_i^k(x_i^k)) \right] \tag{2,2}$$

при $h = \sum\limits_{i=1,\, k=1}^{m,s} u_i^k h_i^k, \quad u_i^k \geqslant 0, \quad h_i^k \in \partial g_i(x_i^k), \quad h \in \partial f(x), \quad s = 1, 2, \ldots$

Если к ограничениям задачи (2,2) добавить требование $x_i^k = x$ (т. е. линеаризация входящих в формулировку задачи (1,2) функций делается в общей для всех функций точке x), то (2,2) примет вид ([5]): найти

$$w = \sup \left[f(x) - \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) \right] \tag{2,3}$$

при $h = \sum_{i=1}^{m} u_i h_i, \quad u_i \geqslant 0, \quad h \in \partial f(x), \quad h_i \in \partial g_i(x), \quad i = 1, \ldots, m.$

Близость задач (2,2) и (2,3) характеризует следующее

Утверждение (прямая теорема двойственности). *Если* (1,2) *разрешима и выполнено условие Слейтера* (*т. е.* $\exists \bar{x} \quad g(\bar{x}) > 0$), *то задачи* (2,2) *и* (2,3) *разрешимы, при этом* $v = w = \overline{w}$, *где* v — *оптимальное значение задачи* (1,2).

Будем говорить, что для (2,3) выполняется условие обобщенной разрешимости, если $w = \overline{w}$.

Теорема 4. *Пусть задача* (2,3) *обобщенно разрешима. Если бесконечная система линейных* (*относительно* x) *неравенств*

$$h_i(x) + g_i(y) - h_i(y) \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, m; \ \forall y \in L, \ \forall h_i \in \partial g_i(y))$$

полиэдрально замкнута, то ограничения задачи (1,2) *совместны.*

Смысл теоремы 4 уясняется в связи со следующим: известно, что из совпадения значений v в (1,2) и v_1 в (1,9) (в этом случае задача (1,2) обобщенно разрешима ([3])) следует разрешимость задачи (1,6), причем $\bar{v} = v$. Теорема же 4 делает заключение о разрешимости прямой задачи (1,2)) из обобщенной разрешимости ей двойственной (2,3).

Теорема 5. *Пусть* w — *решение задачи* (2,3). *Если выпуклая оболочка множества* $\{(g_1(x), \ldots, g_m(x), \ f(x)) \in R^{m+1} \colon x \in L\}$ *замкнута, то задача* (1,2) *разрешима, при этом* $v = w$.

Теорема 5 является тем естественным обобщением обратной теоремы двойственности для задач нелинейного программирования, которое включает обратную теорему двойственности для линейных программ.

Отметим также, что ни в п. 1, ни в п. 2 пространство L не предполагалось априори наделенным топологией.

Институт математики и механики
Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
1 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Черников, Линейные неравенства, «Наука», 1968. [2] A. Charnes, W. W. Cooper, K. O. Kortanek, Nav. Res. Log. Quart., 16, № 1 (1969). [3] Е. Г. Гольштейн, ДАН, 172, № 5 (1967). [4] K. Ritter, Math. Ann., 182, 3 (1969). [5] Б. Н. Пшеничный, Необходимые условия экстремума, «Наука», 1969. [6] P. Wolfe, Quart. Appl., 19, № 3 (1961).