Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 3

УДК 513.737

МАТЕМАТИКА

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

О БАНАХОВЫХ СТРУКТУРАХ И ВОГНУТЫХ ФУНКЦИЯХ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 18 I 1971)

В работе рассматривается конструкция, позволяющая по заданным банаховым структурам, являющимся фундаментами некоторого расширенного K-пространства, образовать большое число новых банаховых структур с помощью вогнутых функций, удовлетворяющих определенным условиям. Эта конструкция была (для случая пространств измеримых функций) введена Кальдероном [1] и изучалась, например, в [2–5]. Она является существенным обобщением известной конструкции пространств Орлича [6]. Напомним, что банаховы структуры измеримых функций на пространстве с мерой, так же как и банаховы структуры числовых последовательностей, суть частные случаи общего понятия абстрактной банаховой структуры. Поэтому приводимые в данной статье результаты нетрудно переформулировать для указанных частных случаев.

Мы будем в основном следовать терминологии и обозначениям из теории полуупорядоченных пространств, принятым в [7]. Напомним, в частности, что KN-пространством называется K-пространство, одновременно являющееся нормированным пространством, с монотонной нормой. Мы будем иметь дело только с банаховыми KN-пространствами, т. е. KN-пространствами, полными по норме. Норма в KN-пространстве X называется универсально полунепрерывной, если из того, что направление $0 \leqslant x_\alpha \uparrow x \in X$, следует, что $\|x_\alpha\|_X \to \|x\|_X$. Норма в KN-пространстве X называется универсально монотонно полной, если из того, что направление $0 \leqslant x_\alpha \uparrow$ в X и $\sup \|x_\alpha\|_X < +\infty$, следует, что существует $\sup x_\alpha \in X$.

Всюду далее символы W, 1, V, X_1, X_2, Z будут означать следующее: W есть произвольное расширенное K-пространство с фиксированной единицей 1; X_1, X_2, Z суть произвольные банаховы KN-пространства, являющиеся фундаментами в W; V есть пространство всех $x \in W$ таких, что

$$\|x\|_V = \inf\{\lambda > 0:\ |x| \geqslant \lambda 1\} < +\infty, \tag{1}$$

таким образом V есть KN-пространство ограниченных элементов с сильной единицей 1.

Определение 1. Через $\mathfrak{A}_2$ обозначим множество всех вещественных вогнутых функций $f(u, v)$, заданных и непрерывных по совокупности аргументов при $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, таких, что

$$f(u, 0) = f(0, v) = 0 \quad \text{при всех} \quad u, v \geqslant 0, \tag{2}$$

$$\lim_{p\to+\infty} f(u, p) = \lim_{q\to+\infty} f(q, v) = +\infty \quad \text{при всех} \quad u, v > 0. \tag{3}$$

Определение 2. Пусть $f \in \mathfrak{A}_2$. Через $f(X_1, X_2)$ обозначим множество всех таких $x \in W$, что

$$|x| \leqslant \lambda f(|x_1|, |x_2|) \tag{4}$$

для некоторого числа $\lambda > 0$ и каких-нибудь $x_i \in X_i$ с $\|x_i\|_{X_i} \leqslant 1$ $(i = 1, 2)$. Через $\|x\|_{f(X_1, X_2)}$ обозначим инфимум всех возможных λ в неравенстве (4).

Лемма 1. (см. ([5])). *Так построенное пространство $f(X_1, X_2)$ с нормой $\|\cdot\|_{f(X_1, X_2)}$ есть банахово KN-пространство, являющееся фундаментом в W.*

Всюду далее будем дополнительно предполагать, что в W существует фундамент L, являющийся KB-пространством с аддитивной нормой, и через J будем обозначать функционал на L, задаваемый формулой

$$J(x) = \|x_+\|_L - \|x_-\|_L, \quad x \in L. \tag{5}$$

Замечание 1. Если W есть K-пространство всех конечных измеримых функций (с отождествлением эквивалентных) на некотором пространстве (T, Σ, μ) с вполне σ-конечной мерой μ, то такое L всегда существует. Можно принять $L = L_1(T, \Sigma, \mu)$ и

$$J(x) = \int_T x\, d\mu, \quad x \in L. \tag{6}$$

Определение 3. Дуальным пространством к Z называется пространство Z' всех $x \in W$ таких, что $xz \in L$ при всех $z \in Z$. Норма на Z' задается формулой

$$\|z\|_{Z'} = \sup\{J(|xz|) : z \in Z, \quad \|z\|_Z \leqslant 1\}. \tag{7}$$

Напомним, что $(Z', \|\cdot\|_{Z'})$ есть банахово KN-пространство, являющееся фундаментом в W. Кроме того, Z' естественным образом можно отождествить с пространством $\bar{Z}$ всех вполне линейных функционалов * на Z.

Всюду далее пусть $M(u)$, $N(v)$ суть пара дополнительных друг к другу N-функций в смысле Красносельского и Рутицкого ([6]), причем никаких дополнительных ограничений на них мы не накладываем. Через $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ обозначим функции, задаваемые при $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ формулами

$$\varphi(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{при } u = 0 \\ uN^{-1}(v/u) & \text{при } u \neq 0; \end{cases} \qquad \psi(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{при } v = 0 \\ vM^{-1}(u/v) & \text{при } v \neq 0. \end{cases}$$

Здесь M^{-1} и N^{-1} суть функции, обратные к M и N, рассматриваемым при неотрицательных значениях аргумента.

Заметим, что $\varphi, \psi \in \mathfrak{A}_2$, причем для любых $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ справедливы соотношения

$$\varphi(u, v) = \inf_{a, b > 0} \frac{au + bv}{\psi(a, b)}, \quad \psi(u, v) = \inf_{a, b > 0} \frac{au + bv}{\varphi(a, b)}.$$

Теорема 1 (основная). *Справедливо равенство (по запасу элементов)*

$$(\psi(X_1, X_2))' = \varphi(X_1', X_2'), \tag{8}$$

причем

$$\|\cdot\|_{\varphi(X_1', X_2')} \leqslant \|\cdot\|_{\psi(X_1, X_2))'} \leqslant 2\|\cdot\|_{(\varphi(X_1', X_2')}. \tag{9}$$

Никаких дополнительных ограничений на X_1 и X_2 не накладывается.

Замечание 2. Неравенство (9) нельзя усилить. Точнее говоря, если константы $c_1, c_2 > 0$ таковы, что

$$c_1\|\cdot\|_{\varphi(X_1', X_2')} \leqslant \|\cdot\|_{(\psi(X_1, X_2))'} \leqslant c_2\|\cdot\|_{\varphi(X_1', X_2')} \tag{10}$$

при всех возможных W, X_1, X_2, M, N, то $c_1 \leqslant 1$ и $c_2 \geqslant 2$.

---

* В случае банаховых структур измеримых функций вполне линейные функционалы суть «интегрально представимые» функционалы, т. е. допускающие интегральное представление такого же типа, как функционалы в классических L_p при $1 < p + \infty$.

Замечание 3. В работе ([5]) решен вопрос, для каких пар (f, g), где $f, g \in \mathfrak{A}_2$, справедливы равенства

$$(f(X_1, X_2))' = g(X_1', X_2'), \tag{11}$$

$$\|\cdot\|_{(f(X_1, X_2))'} = \|\cdot\|_{g(X_1', X_2')} \tag{12}$$

при всех возможных W, X_1, X_2. Оказывается, что все такие пары суть $f(u, v) = Au^{1-s}v^s$, $g(u, v) = A^{-1}u^{1-s}v^s$, где $0 < A < +\infty$, $0 < s < 1$.

Теорема 2. 1) *Если нормы* $\|\cdot\|_{X_1}$, $\|\cdot\|_{X_2}$ на X_1, X_2 *универсально монотонно полны, то этим же свойством обладает и норма* $\|\cdot\|_{\psi(X_1, X_2)}$ *на* $\psi(X_1, X_2)$.

2) Если нормы $\|\cdot\|_{X_1}$, $\|\cdot\|_{X_2}$ на X_1, X_2 *универсально монотонно полны и одновременно универсально полунепрерывны, то этими же двумя свойствами обладает и норма* $\|\cdot\|_{\psi(X_1, X_2)}$ *на* $\psi(X_1, X_2)$.

Замечание 4. Как показывают простые примеры, из того, что нормы $\|\cdot\|_{X_1}$, $\|\cdot\|_{X_2}$ только универсально полунепрерывны, не следует, что этим же свойством обладает норма $\|\cdot\|_{\psi(X_1, X_2)}$. Однако это справедливо, например, в том случае, когда $M(u)$ есть степенная функция.

Теорема 3. Пусть нормы $\|\cdot\|_{X_1}$, $\|\cdot\|_{X_2}$ на X_1, X_2 *универсально полунепрерывны и универсально монотонно полны. Пусть* $x \in \psi(X_1, X_2)$ *и* $\|x\|_{\psi(X_1, X_2)} = \lambda$.

Тогда найдутся $x_i \in X_i$ *такие, что* $\|x_i\|_{X_i} = 1$ $(i = 1, 2)$ *и*

$$|x| \leqslant \lambda\psi(|x_1|, |x_2|). \tag{13}$$

Определение 4. Пусть X — банахово KN-пространство, являющееся фундаментом в W. Через X_M обозначаем множество во всех $x \in W$ таких, что норма

$$\|x\|_{X_M} = \inf\{\lambda > 0 : M(|x|/\lambda) \in X, \quad \|M(|x|/\lambda)\|_X \leqslant 1\} < +\infty. \tag{14}$$

Через X^N обозначаем множество всех $x \in W$ таких, что найдутся $\lambda > 0$ и $y \in X_+$, удовлетворяющие условиям:

а) $\|y\|_X \leqslant 1$ и $W_x \subset W_y$, где W_x и W_y суть компоненты в W, порожденные x и y, соответственно;

б) $N(|x| / (\lambda y))y \in L$, причем $J(N|x| / (\lambda y))y) \leqslant 1$.

Через $\|x\|_{X^N}$ обозначим инфимум всех возможных λ.

Нетрудно показать, что $X_M = \psi(X, V)$, $X^N = \varphi(X, L)$, причем имеет место и совпадение соответствующих норм. Поэтому из теоремы 1 как частный случай прямо вытекает

Теорема 4. *Справедливы равенства* (*по запасу элементов*)

$$(X_M)' = (X')^N, \quad (X^M)' = (X')_N, \tag{15}$$

причем

$$\|\cdot\|_{(X')^N} \leqslant \|\cdot\|_{(X_M)'} \leqslant 2\|\cdot\|_{(X')^N}, \tag{16}$$

$$\|\cdot\|_{(X')_N} \leqslant \|\cdot\|_{(XM)'} \leqslant 2\|\cdot\|_{(X')_N}. \tag{17}$$

Подчеркнем, что на X никаких дополнительных ограничений не накладывается.

Замечание 5. Если в теореме 4 взять $X = L$, то мы получим известные соотношения между пространствами Орлича, построенными по паре дополнительных друг другу N-функций ([6]).

В заключение приведем один вспомогательный результат о пространствах непрерывных функций, используемый при доказательстве теоремы 1, который, возможно, имеет и самостоятельный интерес.

Лемма 2. *Пусть* B — *произвольный бикомпакт,* $C(B)$ — *банахово пространство всех вещественных непрерывных функций на* B. *Пусть* $E =$

$=C(B)\times C(B)$ *есть обычное декартово произведение, причем естественным образом его банахово сопряженное* $E^*=C(B)^*\times C(B)^*$. *Возьмем произвольный* $0\leqslant h\in C(B)^*$ *и положим*

$$G(h)=\{(\mu,\nu)\in E^*\colon\ \mu\geqslant 0,\nu\geqslant 0,\varphi(\mu,\nu)\leqslant h\}.$$

Тогда множество $G(h)$ *непусто, выпукло и слабо * замкнуто, т. е. замкнуто в топологии* $\sigma(E^*,E)$.

Ленинградская военно-инженерная академия
им. А. Ф. Можайского

Поступило
8 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. P. Calderón, Studia Math., 24, № 2 (1964). [2] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, ДАН, 170, № 2 (1966). [3] Г. Я. Лозановский, Сиб. матем. журн., 10, № 3 (1969). [4] Г. Я. Лозановский, ДАН, 188, № 3 (1969). [5] Г. Я. Лозановский, Сиб. матем. журн. (в печати). [6] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, Выпуклые функции и пространства Орлича, 1958. [7] Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, 1961.