

УДК 533.6

АЭРОДИНАМИКА

А. Н. ЛЮБИМОВ

**ДЛИНА КРИТИЧЕСКОЙ ЛИНИИ ТОКА В ТЕЧЕНИЯХ
ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ОКОЛО ТЕЛ ОДНОГО КЛАССА**

(Представлено академиком Г. И. Петровым 23 VII 1970)

Рассмотрим осесимметричные и плоские течения идеального газа около класса тел, образующие которых являются коническими сечениями.

Уравнения образующих в цилиндрической системе координат (z, r) с началом в вершинах тел запишем в виде

$$r^2 = 2pz + qz^2.$$

Здесь p — радиус кривизны образующей в точке $(0, 0)$ (его возьмем одинаковым для всех тел и равным единице), q — параметр, определяющий

Таблица 1

q	Совершенный газ, $k=1,4$						С учетом ф.х.п. $M_\infty=20$
	$M_\infty=1,5$	$M_\infty=2$	$M_\infty=4$	$M_\infty=6$	$M_\infty=20$	$M_\infty=\infty$	
-1	0,6163	0,3504	0,1753	0,1488	0,1308	0,1286	0,0644
-0,25	0,7647	0,4040	0,1910	0,1605	0,1397	0,1377	0,0666
0	0,8634	0,4311	0,1955	0,1633	0,1415	0,1394	0,0671
0,2174	—	0,4627	0,2026	0,1686	0,1444	0,1423	0,0678

форму тела (для сферы $q = -1$, параболоида $q = 0$, гиперboloидов $q > 0$, эллипсоидов с отношением полуосей * $b/a < 1$ $-1 < q < 0$, эллипсоидов $b/a > 1$ $-\infty < q < -1$).

Исследуем двухпараметрические течения совершенного газа с постоянным отношением теплоемкостей $k = 1,4$ при изменении параметров $1,5 \leq$

Таблица 2

q	Совершенный газ, $k=1,4$			
	$M_\infty=2$	$M_\infty=4$	$M_\infty=6$	$M_\infty=20$
-1	1,3312	0,5437	0,4473	0,3835
-0,25	1,8005	0,6520	0,5241	0,4430
0	—	0,7098	0,5619	0,47
0,2174	—	0,7842	0,6060	0,4991

$\leq M_\infty \leq \infty$, $-1 \leq q < 1$. Для этого численно решим смешанную краевую задачу для двумерной системы уравнений газовой динамики. Для решения используем конечно-разностный метод (1), который позволяет получить решение стационарной задачи с высокой точностью установлением по времени, т. е. путем решения нестационарной задачи при $t \rightarrow \infty$ (t — время) и неизменных граничных условиях.

Таким образом определим все поле течения, но нас будет интересовать только один вопрос: какую длину Δ имеет критическая линия и как эта длина зависит от параметров M_∞ и q ? Кроме того, сравним величины Δ в совершенном газе и идеальном газе с равновесными физико-химическими

* a — полуось эллипса, совпадающая с осью симметрии течения.

процессами (ф.х.п.)*. Для этого решим краевую задачу для другой модели газа (совпадающей с моделью газа в (2)), учитывающей диссоциацию, ионизацию, образование окиси азота и представляющую смесь газов из 13 компонент. Значения Δ с ф.х.п. получим для условий, примерно соответствующих атмосферным на высоте $H = 30$ км ($p_H = 1,1684 \cdot 10^{-2}$ атм., $\rho_H = 1,7901 \cdot 10^{-5}$ г/см³).

Для ответа на вопрос проанализируем 70 вариантов осесимметричных и 30 вариантов плоских течений. Ниже приведем выводы анализа и отдельные иллюстрации к ним.

В табл. 1 выписаны значения Δ для ряда вариантов осесимметричных, а в табл. 2 — плоских течений. Методом наименьших квадратов определены коэффициенты a_i полиномов

$$\Delta = \sum_{i=0}^n a_i q^i, \text{ аппроксимирующих значения}$$

Δ для совершенного газа при $M_\infty = \text{const}$, в табл. 3 выписаны a_i для $n=2$. Относительные ошибки этой аппроксимации менее 1%.

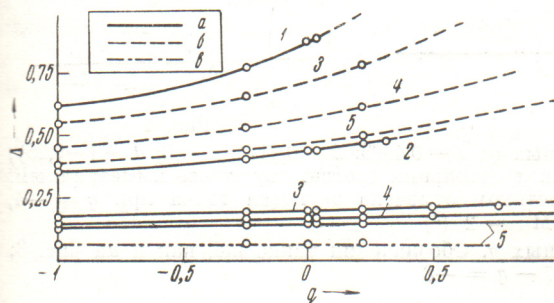


Рис. 1

Рис. 1. Зависимость $\Delta(q)$ для осесимметричных (а) и плоских (б) течений совершенного газа и осесимметричных течений с ф.х.п. (в) при различных M_∞ : 1—1,5; 2—2; 3—4; 4—6; 5—20. Точками показаны некоторые численные значения

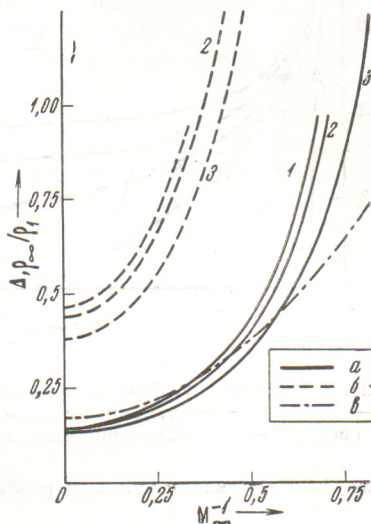


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость $\Delta(M_\infty)$ для осесимметричных (а) и плоских (б) течений при различных q : 1—0; 2—(-0,25); 3—(-1). Линия в — отношение плотностей (ρ_∞ / ρ_1) на прямой ударной волне

По данным табл. 3 определены и нанесены на рис. 1 зависимости $\Delta(q)_{M_\infty=\text{const}}$. Для осесимметричных течений графики продолжены (экстраполяция) пунктиром до значений \bar{q} ($\bar{q} > 0$), при которых в асимптотическом течении (около острого конуса с $\beta_k = \text{arctg} \sqrt{\bar{q}}$) на поверхности тела $M = 1$. Для $q > \bar{q}$ принципиально невозможно рассчитать течение методом (1), так как нельзя построить поверхность пространственного типа П. (В табл. 1, 2 такими случаями являются $q = 0,2714$, $M_\infty = 1,5$ и $M_\infty = 2$.) На современных ЭВМ расчет можно провести до нескольких меньших q , чем $q = \bar{q}$. При $q \geq 0$ и близких к \bar{q} звуковая точка расположена далеко вниз по потоку и, чтобы построить поверхность П, расчетная область должна быть чрезмерно большой. (В табл. 2 таким случаем является $q = 0$, $M_\infty = 2$.)

В плоских течениях графики $\Delta(q)$ также продолжены за расчетные точки и ограничены значениями \tilde{q} , при которых ударная волна в асимптотическом течении (около клина) еще присоединена к острию.

* Течения с ф.х.п. уже будут четырехпараметрическими, так как они определяются и условиями в невозмущенном потоке.

Как следует из табл. 1 и 2 и рис. 1 в осесимметричных течениях при малых и средних M_∞ функция $\Delta(q)$ существенно отличается от линейной и удовлетворительно аппроксимируется квадратной параболой, а при больших M_∞ функция $\Delta(q)$ близка к линейной. При $q < -1$, как следует из данных, полученных методом (3), функция $\Delta(q)$ и при малых M_∞ близка к линейной, а величина $\partial\Delta/\partial q$ мала. Например, при $M_\infty = 2$, $q = -6,5$ $\partial\Delta/\partial q \approx 0,01$, а при $M_\infty = 6$ $\partial\Delta/\partial q \approx 0,004$.

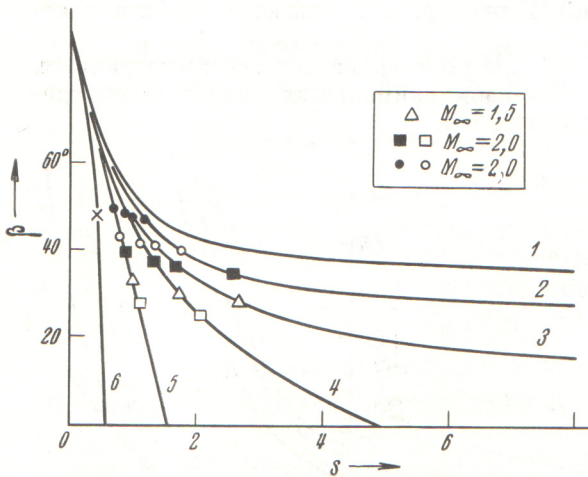


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость $\beta(s)$ при различных q : 1 — 0,4903; 2 — 0,2174; 3 — 0; 4 — (-0,25); 5 — (-1); 6 — (-4). Черные знаки и треугольник соответствуют осесимметричным, а светлые — плоским течениям. Крестиком отмечена звуковая точка при $q = -4$, $M_\infty = 2$ (3)

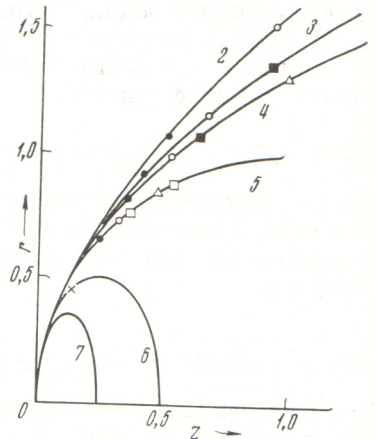


Рис. 4

Рис. 4. Образующие тел при различных q . Обозначения такие же, как и на рис. 3; 7 — $q = -8$

В идеальном газе с ф.х.п. величина Δ меньше, чем в совершенном газе, а функция $\Delta(q)$ близка к линейной. Производная $\partial\Delta/\partial q$ мало отличается от нуля. Например, при $M_\infty = 20$, $q = 0$ $\partial\Delta/\partial q \approx 0,002$ (в совершенном газе $\partial\Delta/\partial q \approx 0,01$).

В плоских течениях, как следует из табл. 2, 3 и рис. 1, функция $\Delta(q)$ существенно нелинейна при всех M_∞ .

На рис. 2 нанесены зависимости $\Delta(M_\infty)_{q=\text{const}}$. По рис. 2 и из табл. 1, 2 видно, что функция $\Delta(M_\infty)$ существенно нелинейна. В совершенном газе наблюдается «стабилизация» длины критической линии тока при $M_\infty \rightarrow \infty$, т. е. $\lim_{M_\infty \rightarrow \infty} (\partial\Delta/\partial M_\infty) = 0$. Характер

Таблица 3

M_∞	a_0	a_1	a_2
Осесимметричное течение			
1,5	0,86654	0,46227	0,21206
2	0,43214	0,13297	0,05149
4	0,19645	0,02721	0,00623
6	0,16397	0,01866	0,00362
20	0,14189	0,01031	-0,00074
	0,13981	0,00992	-0,00123
Плоское течение			
4	0,71404	0,28844	0,11839
6	0,56385	0,17663	0,06017
20	0,47116	0,12115	0,03349

связан с длиной дуги s -образующей, влияющей на дозвуковую область течения, и с законом изменения ее кривизны. Область влияния ограничена этой дугой, критической линией тока, ударной волной и предельной характеристикой первого семейства. Изменение кривизны образующей может быть оценено изменением угла ее наклона β .

На рис. 3 приведены функции $\beta(s)_{q=\text{const}}$, а на рис. 4 показаны образующие. На графиках отмечены дуги образующих, влияющие на дозвуковое течение и определяющие таким образом размеры дозвуковой области и величину Δ .

Более интенсивное изменение угла β приводит и к более резкому расширению потока. Расширение потока вдоль дуги, влияющей на дозвуковое поле течения, как видно по рис. 3, 4, происходит вдоль дуг тем меньшей длины, чем более интенсивно изменяются углы их наклонов. Это приводит к разным размерам областей влияния, а, следовательно, и к разным величинам Δ . А именно, чем интенсивнее изменяется наклон образующей и интенсивнее расширение потока, тем величина Δ меньше и наоборот. Таким образом, тела с большими q имеют большую длину критической линии тока и оказываются более «тупыми» в газодинамическом смысле.

При одной и той же величине $M_\infty - q$ вдоль дуг одной и той же длины, как видно по рис. 3, 4, в осесимметричных течениях расширение потока более интенсивно, чем в плоских. Поэтому величины Δ в плоских течениях больше, чем в соответствующих осесимметричных.

Сечения в дозвуковой области около тел, образующие которых являются коническими сечениями, тем лучше аппроксимируются течением около соприкасающейся сферы, чем меньше q . Так, при $q < -1$ большая часть дуги образующей, определяющей дозвуковое течение, совпадает с дугой соприкасающейся окружности (касание внешнее), чем при $q > -1$ (касание внутреннее). При $q \geq 0$ отклонение длины дуги образующей тела, определяющей дозвуковое течение, от соприкасающейся окружности еще большее. Этим и объясняются малые отличия величины Δ у тел $q < -1$ и у сферы ($q = -1$), большие отличия величины Δ у сферы и у тел $q > -1$ и, особенно, у тел $q > 0$.

В заключение автор выражает благодарность В. В. Русанову за ценные обсуждения при выполнении работы и Ю. Н. Каллистову за помощь в обработке данных расчетов.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
17 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. В. Русанов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 8, № 3, 616 (1968).
² К. И. Бабенко и др., Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом, М., 1964. ³ С. М. Гилинский, Г. Ф. Теленин, Г. П. Тиняков, Изв. АН СССР, Механ. и машиностр., № 4, 9 (1964).