Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 3

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

Д. Ш. МОГИЛЕВСКИЙ

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ХАРАКТЕРЕ ФУНКЦИИ ГРИНА СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 3 II 1971)

1. В работе [3] А. Я. Повзнер и И. В. Сухаревский исследовали разрывы функции Грина внутренней краевой задачи для полного уравнения. Методами теории потенциала они доказали, что разрывы сосредоточены на волновых фронтах, а вне фронтов особенностей нет. В настоящей заметке мы получаем аналогичный результат для случая переменных коэффициентов, используя метод В. П. Маслова [2]. Вначале мы проведем некоторые результаты В. П. Маслова в удобном для нас виде. Рассмотрим оператор

$$F(x, D)\,\psi(x) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n \int e^{ikpx} F(x, p) \int e^{-ikp\xi} \psi(\xi)\, d\xi\, dp, \tag{1}$$

где интегралы обозначают преобразование Фурье по n переменным, $px = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n$. Мы будем рассматривать операторы типа (1) при $F(x, p) \in C^\infty$, удовлетворяющих условию $|D_x^l D_p^m F(x, p)| \leqslant CM^\alpha$ при $M = \sqrt{p^2 + x^2} > A$. Здесь $D_x^l D_p^m$ — оператор дифференцирования, $A > 0$ — некоторая постоянная, C и α, вообще говоря, зависят от l, m *. Нам потребуется также несколько более общие операторы

$$\hat{F}(x, D) = \sum_{j=0}^{m} \left(\frac{1}{ik}\right)^j F_j(x, D). \tag{2}$$

Рассмотрим уравнение

$$\hat{F}(x, D)\psi(x) = 0. \tag{3}$$

Оператор $\hat{F}(x, D)$ на функциях вида

$$\psi(x) = e^{ik\Phi(x)} V(x, k) = e^{ik\Phi(x)} \sum_j \left(\frac{1}{ik}\right)^j V_j(x) \tag{4}$$

вычисляется асимптотически при $k \to \infty$ по методу стационарной фазы. Проделав такое вычисление для уравнения (3) и приравнивая коэффициенты при степенях k, получим рекуррентную систему

$$F_0(x, \partial\Phi/\partial x) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_l} \frac{\partial F_0}{\partial p_l}\bigg|_{p=\partial\Phi/\partial x} + V_j \frac{\partial^2 F_0}{\partial p_l \partial p_q}\bigg|_{p=\partial\Phi/\partial x} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_l \partial x_q} = W_j, \tag{6}$$

причем W_j алгебраически выражается через $\Phi, V_0, \ldots, V_{j-1}$ и их производные. В уравнениях (6) подразумевается суммирование по повторяющимся значкам l, q. Уравнения (5), (6) дают обобщение стандартного лучевого метода [1] (или метода ВКБ) на уравнения типа (3). Уравнение (5) есть уравнение эйконала, линии векторного поля $\partial F_0/\partial p|_{p=\partial\Phi/\partial x}$ — лучи, лучевые уравнения ** (6) — обыкновенные линейные дифферен-

* Класс операторов, выделяемых указанным условием, тесно связан с классом псевдодифференциальных операторов [7].

** Этот термин не является общепринятым. Иногда уравнения типа (6) называют уравнениями переноса [6].

циальные первого порядка вдоль лучей. Точки, в которых нарушается регулярность поля лучей, называются каустическими. Лучевые уравнения имеют в этих точках особенности. Если перейти в импульсное представление по r компонентам

$$\psi(x) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{r/2} \int e^{ikp'x'} \varphi(p', x'')\, dp'; \tag{7}$$

$$F(x, D)\,\psi(x) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{r/2} \int e^{ikp'x'} [\overline{F}(x, D)\, \varphi(p', x'')]\, dp' \tag{8}$$

(здесь $p' = (p_1 \ldots p_r)$; $x'' = (x_{r+1} \ldots x_n)$, а интегралы — преобразование Фурье по r переменным), уравнение (3) переходит в уравнение $\overline{F}(x, D) \cdot \varphi(p', x'') = 0$, а лучевые уравнения — в уравнения

$$F_0(-\partial\overline{\Phi}/\partial p', x''; \quad p', \partial\Phi/\partial x'') = 0; \tag{9}$$

$$-\frac{\partial \overline{V}_j}{\partial p_l}\frac{\partial F_0}{\partial x_l} + \frac{\partial \overline{V}_j}{\partial x_m}\frac{\partial F_0}{\partial p_m} + \overline{V}_j \left[\frac{\partial^2 F_0}{\partial x_l\, \partial x_q} \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overline{\Phi}}{\partial p_l\, \partial p_q} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 F_0}{\partial p_m\, \partial p_s} \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overline{\Phi}}{\partial x_m\, \partial x_s} - \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_l\, \partial p_s} \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overline{\Phi}}{\partial p_l\, \partial x_s} - \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_l\, \partial p_l}\right]\Bigg|_{p'' = \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x''};\; x' = -\frac{\partial \overline{\Phi}}{q p'}} = \overline{W}_j, \tag{10}$$

$$l, q = 1, 2, \ldots, r; \quad m, s = r+1, \ldots, n.$$

Уравнение (9), (10) являются лучевыми уравнениями в импульсном представлении. По ним строятся асимптотические решения вида $e^{ik\overline{\Phi}(p', x'')}\overline{V}(p', x''; k)$. При преобразовании в импульсное представление (и обратно) лучевые решения переходят в лучевые решения согласно методу стационарной фазы. Точная формулировка лучевого метода для уравнения (3) содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Если* $F_j(x, p) \in C^\infty$, $|D_x{}^l D_p{}^m F_j(x, p)| < CM^\alpha$ *при* $M > A$, $\partial F_0/\partial p \neq 0$, $\psi(x) = e^{ik\Phi(x)}V(x, k)\zeta(x)$, *где* $\Phi(x)$, $V_j(x)$, $\zeta(x) \in C^\infty$, $\zeta(x) \equiv 1$ *при* $M < A$ *и* $\zeta(x) \equiv 0$ *при* $M > 2A$ *и* $\Phi(x)$, $V_j(x)$ *удовлетворяют уравнениям* (5), (6), $\psi(x)$ *удовлетворяет уравнению* (3) *с погрешностью* $O(k^{-N})$ *при* $|x| < A$.

Теперь рассмотрим в фазовом пространстве (x, p) гамильтонову систему

$$\dot{x} = \partial F_0/\partial p; \quad \dot{p} = -\partial F_0/\partial x. \tag{11}$$

Как показал В. П. Маслов, семейства лучей в уравнениях (9), (10) получаются проектированием лагранжева многообразия Г, состоящего из траекторий системы (11). Согласно лемме Маслова о локальных координатах, для любой точки гладкого лагранжева многообразия Г существует такой поворот осей, что окрестность этой точки однозначно проектируется на некоторую плоскость (p', x''). Это значит, что лучи в соответствующем представлении не имеют огибающих. Поэтому можно продолжать лучевые решения в окрестности каустики и за каустику. Надо перейти в импульсное представление, в котором точка не является каустической, пересчитать лучевое решение по методу стационарной фазы и продолжать по лучевым уравнениям в импульсном представлении. И так далее. Можно записать решение единой формулой, используя разбиение единицы.

Пусть $\hat{F}(x, D)$ — дифференциальный оператор второго порядка и S — $(n-1)$-мерная поверхность класса C^∞. Тогда каждому лучу, не касательному к границе S, соответствует отраженный луч. Для каждого лучевого решения $\psi(x)$ (будем называть $\psi(x)$ падающей волной) существует отраженная волна $\psi_1(x)$, соответствующая семейству отраженных лучей и удовлетворяющая граничному условию $\psi(x) + \psi_1(x)\,|_s = 0$. Чтобы показать это, распрямим границу гладким обратимым преобразованием координат, чтобы уравнение границы было $\bar{x}_n = 0$. Используя некасательность лучей, можно представление выбрать так, что в окрестности границы по $\overline{x}_n$ будет координатное представление. Граничное условие запишется так:

$$e^{ik\overline{\Phi}(p', x'')}\sum_j\left(\frac{1}{ik}\right)^j\overline{V}_j(p', x'') = -e^{ik\overline{\Phi}_1(p', x'')}\sum_j\left(\frac{1}{ik}\right)^j\overline{V}_{1j}(p', x'')$$

при $\overline{x}_n = 0$. Отсюда получаются начальные условия для $\overline{\Phi}_1(p', x'')$, $\overline{V}_{1j}(p', x'')$, пользуясь которыми можно определить отраженную волну по методу Маслова. Описанный способ построения отраженной волны применим, очевидно, при наличии каустик любого порядка.

2. Обратимся теперь к задаче о функции Грина. Пусть в области $\Omega \subset E_n$ с границей S_0 класса C^∞ задан эллиптический оператор

$$L = a^{ij}\partial^2 / (\partial x_i \partial x_j) + a^i \partial / \partial x_i + a$$

с коэффициентами класса C^∞, причем область Ω является выпуклой в смысле римановой метрики $a_{ij}dx_idx_j$ * $\|a_{ij}\| = \|a^{ij}\|^{-1}$. Функция Грина для области Ω определяется как обобщенная функция t, зависящая от $(x_1 \ldots x_n)$ как от параметров и удовлетворяющая условиям

$$\begin{gathered} U_{tt} - LU = 0, \\ U|_{t=0} = 0, \quad U_t|_{t=0} = \delta(x - x_0), \quad U|_S = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Здесь $x_0 \in \Omega$, $S = S_0 \times [0 \leqslant t < +\infty)$ и начальные условия понимаются так, что при малых t функция $U(x, t)$ совпадает с фундаментальным решением задачи Коши. При описанных условиях имеет место

Теорема 2. *Для любых N и $T > 0$ существует такая функция U_{NT}, имеющая разрывы только на волновых фронтах, что $U - U_{NT} \in C_N$ в $\Omega \times [0 \leqslant t \leqslant T]$.*

Доказательство основано на построении U_{NT} при помощи метода Маслова. Будем искать U_{NT} в виде преобразования Фурье от некоторой функции $\widetilde{U}_{NT}$, удовлетворяющей уравнению $(L + k^2)\widetilde{U}_{NT} = 0$. Рассмотрим падающую волну $\widetilde{U}_0$ и l отраженных от границы волн. Для $\widetilde{U}_0$ мы возьмем начальные данные из преобразования Фурье от фундаментального решения задачи Коши. Далее будем продолжать $\widetilde{U}_0$ до границы по методу Маслова. В точках границы получим начальные данные для первой отраженной волны. Первую отраженную волну продолжаем до границы по методу Маслова и по правилам отражения строим вторую отраженную волну. И так далее по l отражений. Преобразованием Фурье получаем

$$U_{NT} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int e^{-ikt}\left(\sum_0^l \widetilde{U}_m\right)dk.$$

Вблизи сингулярной точки $(x = x_0,\ t = 0)$ гладко сопрягаем с фундаментальным решением задачи Коши. Построенное нами U_{NT} обладает свойствами

$$(\partial^2 / \partial t^2 - L)U_{NT} = f_{NT} \in C_N$$

в силу того, что при $k \to \infty$ $(L + k^2)\widetilde{U}_m = O\left(\frac{1}{k^{N_1}}\right)$. На границе S_0 выполняется соотношение

$$\sum_0^l \widetilde{U}_m|_{S_0} = \widetilde{U}_l|_{S_0} + O\left(\frac{1}{k^{N_1}}\right)$$

в силу того, что отраженные волны взаимно компенсируют одна другую,

---

* Это означает, что всякий луч, выпущенный из точки на S_0 по касательному направлению, лежит вне Ω и его радиус кривизны отличен от радиуса кривизны соответствующего нормального сечения S_0 ([8]).

за исключением последней. Поэтому

$$U_{NT}\,|_S = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int e^{-ikt}\, \widetilde{U}_l\,|_{S_0}\, dk + \varphi_{NT},$$

причем $\varphi_{NT} \in C_N$ на S, а первое слагаемое может иметь разрывы при $t = \Phi_l$. При достаточно большом l везде на границе $\Phi_l > T$ *. Следовательно, $U_{NT}\,|_S \in C_N$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Для разности $U - U_{NT}$ получаются нулевые начальные условия, $U - U_{NT}\,|_S \in C_N$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, а также $(\partial^2 / \partial^2 t - L)(U - U_{NT}) = -f_{NT} \in C_N$ в $\Omega \times [0 \leqslant t \leqslant T]$. Согласно общим теоремам о смешанной задаче $U - U_{NT} \in C_N$ в $\Omega \times [0 \leqslant t \leqslant T]$. Этим завершается доказательство теоремы 2, поскольку по любым N и T можно выбрать соответствующие N_1 и l.

3. Если потребовать кроме условий теоремы 2 аналитичности границы S_0 и коэффициентов оператора L, имеет место

Теорема 3. *Функция Грина $U(x, t)$ аналитична во всех точках, не лежащих на фронтах падающей и отраженных волн, на фронтах имеет разрывы, удовлетворяющие уравнениям лучевого метода, а в окрестностях каустик имеет особенности, выражающиеся интегралами от лучевых решений.*

Доказательство основано на теореме об отражении лучевых рядов ([1]), теореме об отражении лучевых решений в окрестности каустик ([4]) и теореме об аналитичности решений смешанной задачи до ближайшей характеристики ([5]). Согласно последней теореме, из аналитичных начальных данных получаются аналитические решения. Все особенности при малых t описываются лучевыми рядами. Дело сводится к умению отражать лучевые решения от границы, в результате чего, согласно ([1]) и ([4]), также получаются лучевые решения, а других особенностей не возникает.

Рыбинский вечерний технологический институт

Поступило 7 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Бабич, Проблемы дифракции и распространения волн, сборн. 5, 1961, стр. 25. [2] В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965. [3] А. Я. Певзнер, И. В. Сухаревский, Математич. сборн., 51 (93), № 1, 3 (1960). [4] Д. Ш. Могилевский, Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, в печати. [5] Д. Ш. Могилевский, V Всесоюзн. симпозиум по дифракции, сборник аннотаций, Л., 1970, стр. 44. [6] Ф. Фридлендер, Звуковые импульсы, ИЛ, 1962. [7] Л. Хёрмандер, Сборн., Псевдодифференциальные операторы, М., 1967, стр. 63. [8] Р. Бишоп, Р. Криттенден, Геометрия многообразий, М., 1967.

* Это следует из выпуклости Ω в смысле римановой метрики. В ([3]) приводится доказательство этого факта, принадлежащее А. В. Погорелову (для случая прямолинейных лучей).