Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. К. НИКОЛЬСКИЙ

К СПЕКТРАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ НА УНИТАРНОМ СПЕКТРЕ. ТОЧЕЧНЫЙ СПЕКТР

(Представлено академиком В. И. Смирновым 3 II 1971)

Каждое сжатие* T в гильбертовом пространстве H порождает разложение $H = H_C \oplus H_0$, где подпространство H_C натянуто на собственные векторы (с. в.) оператора T, отвечающее собственным числам (с. ч.), лежащим на единичной окружности $C = \{\lambda: |\lambda| = 1\}$, а H_0 — ортогональное дополнение H_C. Важно заметить (см., например, [1]), что H_0 также инвариантно относительно T, и потому возможно ортогональное разложение $T = T_C \oplus T_0$, где $T_0 = T|H_0$ — сжатие без унитарных с.ч., а $T_C = T|H_C$ — унитарный оператор с чисто точечным спектром. Операторы последнего типа исследованы достаточно хорошо. Естественно, однако, не ограничивать подобное исследование рамками гильбертовых пространств, т. е. попытаться выделить слагаемое типа H_C для произвольного сжатия в банаховом пространстве и исследовать соответствующий оператор T_C. С этой точки зрения в заметке рассматриваются некоторые задачи как для оператора сжатия (по этому поводу см. также [2–6]), так и для более общих классов операторов.

Обозначения: $\mathbf{C}^1$ — комплексная плоскость; $\bar{A}$ — замыкание множества A; $\mathscr{L}(A)$ — замкнутая линейная оболочка множества A; $\sigma(T)$ $[\sigma_p(T)]$ — спектр (точечный спектр) оператора T; $E_\lambda = \ker(T - \lambda I)$ — собственное подпространство** T, отвечающее с.ч. λ, $\lambda \in \mathbf{C}^1$; $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$, $\lambda \in \mathbf{C}^1 \setminus \sigma(T)$.

1. Проекторы на подгруппы; отщепление унитарного спектра.

Теорема 1. *Пусть T — сжатие в рефлексивном банаховом пространстве X, Γ — подгруппа окружности C.*

Тогда в X существует проектор P_Γ на подпространство $E_\Gamma = \mathscr{L}(E_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$, перестановочный со всеми операторами, перестановочными с T. Проектор P_Γ ортогонален в том смысле, что $\|P_\Gamma\| \leqslant 1$.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 существует ортопроектор P_C из X на $E_C = \mathscr{L}(E_\lambda)_{\lambda \in C}$, так что $X = E_C + E_0$, $E_0 = (I - P_C)X$, оператор $T_C = T|E_C$ унитарен (т. е. изометричен и обратим), а $T_0 = T|E_0$ не имеет собственных чисел, лежащих в C.*

Следствие 2. *Если множества Λ_1 и Λ_2, $\Lambda_i \subset C$, $i = 1, 2$, рационально независимы (см [7]), то в условиях теоремы 1 подпространства E_{Λ_1} и E_{Λ_2} взаимно ортогональны: $\|x + y\| \geqslant \max(\|x\|, \|y\|)$ при $x \in E_{\Lambda_1}$, $y \in E_{\Lambda_2}$.*

Следствие 3. *Если $\sigma_p(T) \cap C$ — рационально независимое множество, то в условиях теоремы 1 семейство проекторов*** $\{P_\lambda\}_{\lambda \in C}$ порождает не только безусловный, но и ортонормированный (определение см. [8]) базис в X. При этом, если $\delta(\omega)$ — модуль выпуклости**** пространства X, то*

$$\sum_{\lambda \in C} \delta(\|P_\lambda x\|) < \infty, \quad x \in X.$$

---

* Оператор T ($\equiv$ линейный непрерывный оператор) называется сжатием, если $\|T\| \leqslant 1$.

** Чтобы показать зависимость от T, будем использовать знак E_λ^T.

*** Проектор P_λ (на подпространство E_λ) соответствует в рамках теоремы 1 подгруппе $\Gamma = \{1\}$ и оператору $\lambda^{-1}T$, $\lambda \in C$.

**** $\delta(\omega) \overset{\text{def}}{=} \inf(1 - {}^1/_2\|x + y\|)$; inf берется по всем x и y таким, что $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x - y\| = \omega$. Если X гильбертово, то $\delta(\omega) \sim \text{const} \cdot \omega^2$.

Замечание. Существует (не рефлексивное) сепарабельное банахово пространство X и такой унитарный оператор T в нем, что подпространство $E_C = \mathcal{L}(E_\lambda)_{\lambda \in C}$ не имеет топологического дополнения в X. Это показывает, что в теореме 1 условие рефлексивности нельзя отбросить.

2. Инвариантные подпространства в прямом произведении.

Теорема 2. *Пусть T_1 — полная* изометрия в банаховом пространстве X и $\dim E_\lambda^{T_1} < \infty$, $\lambda \in C$; T_2 — оператор сжатия в рефлексивном пространстве Y и $T = T_1 \times T_2$. Если L — замкнутое подпространство в $X \times Y$ и $TL \subset L$, то*

$$L = (L_X \times L_Y) + G(D), \tag{1}$$

где $L_X = \{x: (x, 0) \in L\}$, $L_Y = \{y: (0, y) \in L\}$, $G(D) = \{(z, Dz): z \in Z\}$ — график оператора D, $D: Z \to Y$, $Z \subset X$, который а) *взаимно однозначен и замкнут*; б) *диагонален в том смысле, что $P_\lambda{}^T x \in Z$, если $x \in Z$; $D\left(\sum\limits_\lambda x_\lambda\right) = \sum\limits_\lambda D_\lambda x_\lambda$ для любого финитного семейства $\{x_\lambda \in E_\lambda^{T_1}: \lambda \in C\}$*, где *$D_\lambda$ — линейные операторы из $E_\lambda^{T_1}$ в $E_\lambda^{T_2}$.*

Разложение (1) *является прямым и квазитопологическим* (*пересечение слагаемых есть* $\{0\}$, *а их сумма плотна в* L).

Верно и обратное утверждение: *любое подпространство вида* (1) *с $T_1 L_X \subset L_X$ и $T_2 L_Y \subset L_Y$ инвариантно относительно оператора $T = T_1 \times T_2$.*

Следствие. *Если $\sigma_p(T_1) \cap \sigma_p(T_2) = \phi$, то из $TL \subset L$, $T = T_1 \times T_2$, следует, что $L = L_X \times L_Y$. В частности, это верно при $\sigma_p(T_2) \cap C = \phi$* (для гильбертовых пространств X и Y последнее утверждение содержится в ([9])).

3. Замечания о геометрии собственных подпространств. Пусть X — рефлексивное пространство и T — оператор в X с $\sigma(T) \subset \{\lambda: |\lambda| \leqslant 1\}$ и

$$K = \sup_{|\lambda| > 1} \|R(\lambda, T)\| (|\lambda| - 1) < \infty.$$

Из эргодической теоремы для абелевых средних ([10]) вытекает, что при каждом λ, $\lambda \in C$, существует проектор $P_\lambda = \lim\limits_{r \to 1-0} (1 - r) R(r\lambda, T)$ на E_λ параллельно линеалу $(T - \lambda I)X$ и $\|P_\lambda\| \leqslant K$, $\lambda \in C$. Поэтому множество $\{\lambda: \|P_\lambda x\| \geqslant \varepsilon > 0\}$ конечно для любого x, $x \in X$, и для любого ε; если X сепарабельно, то $\sigma_p(T) \cap C$ есть (не более чем) счетное множество и система собственных подпространств $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \sigma_p(T) \cap C}$ равномерно минимальна**. (Случай $\|T\| \leqslant 1$ см. ([6]).) При более жестких условиях $\sup\limits_{n \geqslant 0} \|T^n\| < \infty$ и $\mathcal{L}(E_\lambda)_{\lambda \in C} = X$ оператор T допускает спектральный синтез, т. е. каждое его инвариантное подпространство L порождается собственными векторами, содержащимися в L (см. ([5])). Однако даже в гильбертовом пространстве уже сколь угодно слабый рост $\|T^n\|$, $n = 0, 1, \ldots$, может быть препятствием для наличия спектрального синтеза. Именно, справедлива

Теорема 3. *Пусть X — гильбертово пространство*, $\dim X = \infty$; *$\alpha_n > 1$ при всех n, $n = 0, 1, \ldots$, и* $\lim\limits_n \alpha_n = \infty$; *$\mu(r)$ — положительная функция на $(0, \infty)$, убывающая и неограниченная около нуля.*

Тогда существует оператор T в X такой, что: а) $\mathcal{L}(E_\lambda)_{\lambda \in C} = X$; б) $\|T^n\| \leqslant \alpha_n$, $n \geqslant 0$; в) $\|R(\lambda, T)\| \leqslant \mu(|\lambda| - 1)(|\lambda| - 1)^{-1}$, $|\lambda| > 1$; г) *T не допускает спектральный синтез.*

4. Спектр и точечный спектр.

---

* Т. е. собственные векторы T_1 образуют полное в X множество.

** Определение см., например, в ([11]).

Теорема 4. 1) *Если X — банахово пространство, T — линейный и обратимый оператор в X, $X = \mathscr{L}(E_\lambda)_{\lambda\in C}$, и*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|\log\|T^n\||}{n^2+1} < \infty, \tag{2}$$

то *

$$\sigma(T) = \overline{\sigma_p(T) \cap C}. \tag{3}$$

2) *Если $\alpha_n > 1$, $n \geqslant 0$, $\lim\limits_n \alpha_n = \infty$, то существует оператор T в гильбертовом пространстве X такой, что $\mathscr{L}(E_\lambda)_{\lambda\in C} = X$, $\|T^n\| \geqslant \alpha_n$, $n \geqslant 0$ и $0 \in \sigma(T)$.*

Замечание. В ([6]) показано, что при условии $\sup\limits_{n\geqslant 0}\|T^n\| < \infty$ (ср. с п. 2) теоремы 4) равенство (3) имеет место.

5. Точечный спектр и рост $\|T^n\|$, $n \geqslant 0$. Как уже отмечалось, ограниченность последовательности норм $\|T^n\|$, $n = 0, 1, \ldots$ влечет (в сепарабельном пространстве) счетность граничного точечного спектра $\sigma_p(T) \cap C$. В общем случае можно утверждать, что чем больше мощность множества $\sigma_p(T) \cap C$, тем быстрее должна расти последовательность $\{\|T^n\|\}_{n=0}^{\infty}$. Более точно, имеет место

Теорема 5. *Пусть X — гильбертово пространство, T — оператор в X, γ — четная, положительная, выпуклая на* $(0, 2\pi)$ *и суммируемая около нуля функция, $\hat\gamma(n)$ — (неотрицательные) коэффициенты Фурье функции γ, $n = 0, \pm 1, \ldots$*

1) *Если внутренняя γ-емкость (см., например, ([7])) множества $\sigma_p(T) \cap C$ положительна, то*

$$\sum_{n=N}^{\infty} \hat\gamma(n)\|T^{n-N}\|^{-2} < \infty$$

при некотором целом N, $N \geqslant 0$.

2) *Если внутренняя лебегова мера множества $\sigma_p(T) \cap C$ положительна, то*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|T^n\|^{-2} < \infty.$$

Замечание. Верно и обратное утверждение: *если $1 \leqslant \omega_{m+n} \leqslant \omega_n\omega_m$; $n, m \geqslant 0$, и $\sum\limits_0^{\infty}\frac{1}{\omega_n} < \infty$, то существует оператор T (действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве X) такой, что $\|T^n\| \leqslant \omega_n$, $n \geqslant 0$, и $\sigma_p(T) \supset C$.*

При доказательстве теоремы 5 используется следующая

Лемма. *Если e — борелевское подмножество C, оператор T удовлетворяет условиям теоремы 5, T^* — циклический оператор ** и $e \subset \sigma_p(T) \cap C$, то существует борелевская функция $\lambda \to x_\lambda$, $\lambda \in e$, такая, что $Tx_\lambda = \lambda x_\lambda$, $x_\lambda \neq 0$, $\lambda \in e$.*

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
18 I 1971

* Условие (2) налагает весьма слабые ограничения на рост норм $\|T^n\|$, $n = 0, \pm 1, \ldots$ Вместо (2) можно также требовать

$$\sigma(T) \subset C \text{ и } \int_0 \log\log \max_{||\lambda|-1|=\delta} \|R(\lambda, T)\|\, d\delta < \infty.$$

** Т. е. $\mathscr{L}(T^{*n}f)_{n\geqslant 0} = X$ при некотором f, $f \in X$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Секефальви-Надь, Ч. Фойаш, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, М., 1970. [2] E. Lorch, Trans. Am. Math. Soc., 49, № 1, 18 (1941). [3] K. de Leeuw, I. Glicksberg, Acta Math., 105, 63 (1961). [4] Ю. И. Любич, ДАН, 132, № 3, 518 (1960). [5] Ю. И. Любич, Усп. матем. наук, 20, № 5, 221 (1965). [6] А. С. Маркус, Л. Н. Никольская, Н. К. Никольский, Матем. заметки (в печати). [7] Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, М., 1961. [8] Буй Мин Чи, В. И. Гурарий, Теория функций, функц. анализ и их прилож., в. 8, 74 (1969). [9] А. С. Маркус, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, № 3, 662 (1970). [10] Е. Хилле, Р. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1962. [11] Н. К. Никольский, Б. С. Павлов, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, № 1, 90 (1970).