Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

М. И. РАБИНОВИЧ, А. А. РОЗЕНБЛЮМ

К ОБОСНОВАНИЮ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком А. В. Гапоновым-Греховым 2 II 1971)

Известные асимптотические методы решения нелинейных уравнений в частных производных с малым параметром можно разделить на три группы: методы теории возмущений ([1,2]), различные варианты метода геометрической оптики ([3]) и методы ([5,6]), родственные известному асимптотическому методу Н. Н. Боголюбова для уравнений в обыкновенных производных ([4]). Развитие этих методов шло, в основном, в направлении разработки новых вариантов, приспособленных для решения более широкого круга задач. Вопрос же обоснования асимптотических методов для нелинейных уравнений в частных производных оставался открытым.

В данной работе делается попытка дать общий подход к различным асимптотическим методам и проводится их обоснование для одномерных динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных гиперболического и параболического типов.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в форме

$$\begin{gathered} N(U) \equiv U_t + A(U,\ x,\ t,\ \chi,\ \tau)\, U_x + B(U,\ x,\ t,\ \chi,\ \tau) = \\ = \mu f_1(U,\ U_x,\ U_t,\ x,\ t,\ \chi,\ \tau) + \ldots + \mu^m f_m(U,\ U_x,\ U_t,\ x,\ t,\ \chi,\ \tau) + \ldots, \\ \frac{d}{dx}\chi = \mu\ \ \frac{d}{dt}\tau = \mu,\ \ 0 \leqslant \mu \ll 1, \end{gathered} \tag{1}$$

с начальными данными

$$U(x,\ t,\ \mu)\,|_{\Gamma} = \Phi(x,\ t,\ \mu); \tag{2}$$

здесь A — квадратная матрица; аналитическая функция U; $U = (U_1, \ldots, U_n)$; B и $f = (f', \ldots, f^n)$ — вектор функции, причем f, B — аналитические функции U, U_x, U_t; Γ — кривая начальных данных.

Задача асимптотических методов заключается в построении приближенного решения системы (1), (2) — $U^{(m)}(x, t)$, удовлетворяющего на конечном интервале X, T условию

$$|U^{(m)}(x,t) - U(x,t)| < \mu^{m+1}M, \tag{3}$$

где $U(x, t)$ — точное решение (1), (2). Для всех асимптотических методов, однако, характерно, что вместо отыскания решения, непосредственно удовлетворяющего (3), ищется решение $U^{(m)}$, удовлетворяющее (1), (2) с точностью до членов порядка μ^{m+1}, а доказательство (3) составляет обоснование метода. При таком подходе обоснование асимптотических методов не зависит от конкретной процедуры получения решения $U^{(m)}$ и может быть проведено для всей группы методов одновременно.

Для системы (1), (2) образуем m-е приближение

$$\begin{gathered} U^{(m)} = V\,[C_1(x,\ t,\ \chi,\ \tau), \ldots, C_l(x,\ t,\ \chi,\ \tau),\ C_{l+1}(\chi,\ \tau), \ldots, C_{l+r}(\chi,\ \tau)] + \\ + \sum_{i=1}^{m} \mu^i w^{(i)}(x,\ t,\ \chi,\ \tau), \end{gathered} \tag{4}$$

где $V[C_1(x, t), \ldots, C_l(x, t), C_{l+1}, \ldots, C_{l+r}]$ — известное точное или приближенное r-параметрическое семейство решений невозмущенной системы (1), (2) (при $\mu = 0$), т. е. удовлетворяет условию ($C_{1,\ldots,l}$ — обобщенные фазы)

$$N\{V[C_1(x,t,\chi^0,\tau^0),\ldots,C_l(x,t,\chi^0,\tau^0),C_{l+1},\ldots,C_{l+r}]\}=\gamma(x,t);$$
$$|\gamma(x,t)|\leqslant R\mu^{m+1}; \tag{5}$$

неизвестные функции $w^{(i)}$, как и $V(x,t,\mu)$, удовлетворяют начальным данным (следующим из (2), (4))

$$|V(x,t,\mu)-U(x,t,\mu)|_\Gamma<K^0\mu,$$
$$\Big|V+\sum_{i=1}^{j}\mu^i w^{(i)}-U\Big|_\Gamma<K^j\mu^{j+1},\quad j=1,2,\ldots,m. \tag{6}$$

При $\mu\neq 0$ определим V системой

$$\frac{\partial V}{\partial t^*}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{m}\mu^i F^{(i)}[\chi,\tau,V,V'_{C_1,\ldots},V'_{C_{l+r}}], \tag{7}$$

где $F^{(i)}$ — неизвестные пока операторы по χ и τ *, а начальные данные для V определяются (6).

Рассмотрим оператор $\overline{N}(U^{(m)})=N(U^{(m)})-\mu f_1-\ldots-\mu^m f_m$ и, воспользовавшись формулой Тейлора, сгруппируем в нем члены с одинаковыми степенями μ от 0 до m. Учитывая при этом (5), (7), получим

$$\begin{aligned}\overline{N}(U^{(m)})=\ &\mu[Lw^{(1)}+F^{(1)}+A(V)V_\chi-f_1(V,V_x,V_t)]_{(1)}+\mu^2[Lw^{(2)}+F^{(2)}+\\&+w_\tau^{(1)}+A(V)w_\chi^{(1)}+A'_U(V)w_\chi^{(1)}w^{(1)}+{}^1/_2B''_{UU}(V)(w^{(1)})^2-f'_{1_U}(V,V_x,V_t)w^{(1)}-\\&-f'_{1_{U_x}}(V,V_x,V_t)(w_x^{(1)}+V_\chi)-f'_{1_{U_t}}(V,V_x,V_t)(w_t^{(1)}+V_\tau)-f_2(V,V_x,V_t)]_{(2)}+\ldots\\&\ldots+\mu^m[Lw^{(m)}+F^{(m)}+w_\tau^{(m-1)}+A(V)w_\chi^{(m-1)}+A'_U(V)(w^{(m-1)}w_x^{(1)}+\ldots\\&\ldots+w^{(1)}w_x^{(m-1)})+{}^1/_2A''_{UU}(V)(w^{(1)^2}w_x^{(m-2)}+\ldots)+\ldots\\&\ldots+\frac{1}{(m-1)!}A_U^{(m-1)}(V)(w^{(1)})^{m-1}w_x^{(1)}-f'_{1_U}(V,V_x,V_t)w^{(m-1)}-\ldots\\&\ldots-f'_{m-1,U}(V.V_x,V_t)w^{(1)}-f_m(V,V_x,V_t)-\ldots]_{(m)}+\\&+\mu^{m+1}[w_\tau^{(m)}+A(V)w_\chi^{(m)}+\ldots],\end{aligned} \tag{8}$$

$$Lw^{(i)}=w_t^{(i)}+A(V)w_x^{(i)}+[B'_U(V)+A'_U(V)V_x]w^{(i)}. \tag{9}$$

Требуя, чтобы коэффициенты при μ^i, $i=1,2,\ldots,m$ в (8) обратились в нуль, получим для $w^{(i)}(x,t)$ систему линейных уравнений

$$Lw^{(i)}=h^{(i)}[x,t,\chi,\tau]-F^{(i)},\quad i=1,2,\ldots,m, \tag{10}$$

где $h_i=[\quad]_{(i)}-Lw^{(i)}-F^{(i)}$, а χ и τ следует рассматривать как независимые параметры. В тех случаях, когда задача (10), (6) имеет ограниченные решения $|w^{(i)}|<1/\mu$, в силу выбора функций $w^{(i)}$, m-приближение $U^{(m)}$ удовлетворяет исходной системе (1) с точностью до членов порядка μ^{m+1}, т. е. системе

$$\overline{N}(U^{(m)})=\mu^{m+1}G^{(m)}(x,t,\chi,\tau), \tag{11}$$

где в $G^{(m)}$ сгруппированы коэффициенты при $\mu^{\alpha+1}$ в (8) $(\alpha\geqslant m)$.

При определении операторов $F^{(i)}$ следует исходить из условия, что система (10) должна иметь ограниченные в указанном смысле решения $w^{(i)}$.

В качестве важного и весьма общего примера дадим способ определения $F^{(i)}$ в случае, когда система (10), (6) допускает существование периодических по x и t решений. Пусть $\Lambda(\chi,\tau)$ и $\Theta(\chi,\tau)$ — периоды этих решений по x и t $(\Lambda\ll X,\ \Theta\ll T)$, рассмотрим для $w^{(i)}$ задачу с периодическими краевыми условиями

$$w^{(i)}(x+\Lambda,t,\chi,\tau)=w^{(i)}(x,t+\Theta,\chi,\tau)=w^{(i)}(x,t,\chi,\tau) \tag{12}$$

* Для уравнений в частных производных такой подход впервые использовался в [5] (здесь $\partial/\partial t^*$ означает полную частную производную при t).

и краевую задачу

$$L^*\psi \equiv -\psi_t - (A^*\psi)_x + P^x\psi = 0;$$
$$\psi(x+\Lambda, t) = \psi(x, t+\Theta) = \psi(x, t), \tag{13}$$

где A и $P = B_U'(V) + A(V)V_x$ — матрицы, периодические по x и t с периодами Λ и Θ, A^*, P^* — матрицы, транспонированные к A, P. Оператор задачи (13) L^* сопряжен оператору L задачи (10), (12), т. е.

$$\int\limits_x^{x+\Lambda}\int\limits_t^{t+\Theta}(\psi^{(j)},\ h^{(i)})\,dx\,dt = \int\limits_x^{x+\Lambda}\int\limits_t^{t+\Theta}(\psi^{(j)}, F^{(i)})\,dx\,dt \text{ или } [\psi^{(j)}, h^{(i)}] = [\psi^{(j)}, F^{(i)}]. \tag{14}$$

Так как $L^*\psi = 0$, а $Lw = h - F$, то $0 = [L^*\psi, w] = [\psi, Lw] = [\psi, h - \psi]$, поэтому необходимо, чтобы $F^{(i)}$ удовлетворяли системе интегральных уравнений

$$\int\limits_x^{x+\Lambda}\int\limits_t^{t+\Theta}(\psi^{(j)},\ h^{(i)})\,dx\,dt = \int\limits_x^{x+\Lambda}\int\limits_t^{t+\Theta}(\psi^{(j)},\ F^{(i)})\,dx\,dt \text{ или } [\psi^{(j)}, h^{(i)}] = [\psi^{(j)}, F^{(i)}]. \tag{15}$$

В ряде случаев эти условия являются достаточными условиями разрешимости задачи (10), (12) ([7]) (здесь $\psi^{(j)}$ — любое решение (13)).

Поскольку $L(V'_{C_i}) = 0$, то $[V'_{C_i}, \psi^{(j)}] = \delta_{ij}\alpha_i$ (α_i — число). Учитывая это, если $\frac{\partial}{\partial t^*}C_{1,\ldots,l}$ не зависят от x, t явно, из (7) и (15) получим уравнения для параметров C_i. Умножив (7), где $\frac{\partial V}{\partial t^*} = \frac{\partial V}{\partial t} + \mu\sum_{i=1}^{l+r}\frac{\partial C_i}{\partial \tau}V'_{C_i}$, скалярно на $\psi^{(j)}$, найдем*

$$\alpha_i\partial C_i/\partial\tau = [h^{(1)}, \psi^{(i)}] + \ldots + \mu^{m-1}[h^{(m)}, \psi^{(i)}] \quad (i = 1, 2, \ldots, l+r). \tag{16}$$

Рассмотренный подход применим и к другим типам уравнений с малым параметром (разностным, дифференциально-разностным, интегро-дифференциальным и т. д.). Пусть $\Omega U = \mu j(U, x)$, где Ω — некоторый оператор по $x = (x_1, \ldots, x_k)$ от $U(x)$ (x_i могут изменяться непрерывно или дискретно) и пусть известно решение $V(x)$ уравнения $\Omega V = 0$, тогда m-е приближение ищется в виде (7), где $V(x, \chi)$ предполагается удовлетворяющим уравнению $\Omega_{x_i} = \sum_{i=1}^{m}\mu^i F^{(i)}$; оператор Ω_{x_i} имеет тот же вид, что и Ω, но операции проводятся только по аргументу x_i.

Для обоснования рассмотренного подхода доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть система*

$$U_t + Q(U, x, t, \mu)U_x + S(U, x, t, \mu) = 0 \tag{17}$$

удовлетворяет в области $-\infty < U,\ x < \infty,\ 0 \leqslant t,\ \mu < \infty$, *условиям: 1) Q — симметричная матрица, имеющая непрерывные производные по всем аргументам; 2) S непрерывна по x и t, непрерывно дифференцируема по U, μ; 3) через каждую точку полуплоскости (x, t) проходит не менее двух характеристик и все характеристики пересекают в обратном направлении ось абсцисс (условие (*)).*

Тогда ее решение задачи Коши является непрерывно дифференцируемой функцией параметра μ при всех $0 \leqslant \mu < \infty$.

---

* Согласно (16) и (4), (7), уравнения для обобщенных фаз получаются в виде

$$\alpha_i\frac{\partial C_i}{\partial t^*} = [(-A(V)V_x - B(V)), \psi^{(i)}] + \sum_{k=1}^{m}\mu^k[h^{(k)}, \psi^{(i)}], \quad i = 1, 2, \ldots, l.$$

Теорема 2. *Пусть системы* (1) *и* (11) *в области* $-\infty < U, U_x, U_t, x, \chi < \infty$, $0 \leqslant t, \tau < \infty$, $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_1$ *удовлетворяют требованиям:* 1) $A(U, x, t, \chi, \tau)$, $B(U, x, t, \chi, \tau)$, $f_k(U, U_x, U_t, x, t, \chi, \tau)$, $g^{(m)}(x, t, \chi, \tau)$ *непрерывно дифференцируемы по всем аргументам;* 2) *существуют решения* U, $U^{(m)}$ *систем* (1), (11), *равномерно ограниченные по* μ *и дважды непрерывно дифференцируемые по* x, t, *удовлетворяющие начальным условиям* $U(x, 0, \mu) = \varphi_1(x, \mu)$; $U^{(m)}(x, 0, \mu) = \varphi_2(x, \mu)$, *причем* $|\varphi_1(x, \mu) - \varphi_2(x, \mu)| < K\mu^{m+1}$ K — *постоянная;* 3) *системы являются гиперболическими, причем все характеристики, проходящие через любую точку полуплоскости* (x, t), *в обратном направлении пересекают ось абсцисс (условие* (**)). *Тогда, каковы бы ни были числа* X_1, X_2, T, *существует такая постоянная* M *и значение* μ_0, *что* $|U^{(m)}(x, t, \mu) - U(x, t, \mu)| < M\mu^{m+1}$ *при всех* $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$.

Аналогичная теорема справедлива и для симметричных параболических систем, если правая часть их не зависит от U_x и U_t и выполнено условие (*).

Если возможно выбрать $F^{(i)}$ таким образом, чтобы существовало ограниченное решение (10), то, применяя к этой системе теорему 1, покажем, что существует $U^{(m)}$, определяемое (4), (7), которое удовлетворяет (11). Поскольку $C_1, \ldots, C_{l+r}$ можно считать неограниченное число раз дифференцируемыми функциями χ, τ, то для коэффициентов системы (10) выполняются условия теоремы 1 и $w^{(1)}(x, t, \chi, \tau) \in C^1$. Так как $w^{(i)}$ определяются рекуррентно, то из $w^{(i-1)} \in C^1$ следует $w^{(i)} \in C^1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и $g^{(m)}(x, t, \chi, \tau) \in C^1$, следовательно, $U^{(m)}$ удовлетворяет (11).

Теорема 3. 1) *Пусть система* (1), *гиперболическая в области* $-\infty < U, U_x, U_t, x, \chi < \infty$, $0 \leqslant t, \tau < \infty$, *удовлетворяет в ней требованиям:* A, B, f_k $(m + 1)$ *раз дифференцируемы по* U, U_x, U_t *и непрерывно дифференцируемы по* x, χ, t, τ *и выполнено условие* (**).

Существует решение (1), *дважды непрерывно дифференцируемое по* x, t *и равномерно ограниченное по* μ.

2) *Пусть* $U^{(m)}$ *определяется формулами* (4), (7), *где* $w^{(i)}$ — *решения* (10), *а* $F^{(i)}$ *выбраны так, что обеспечивают существование ограниченных решений* (10) *при начальных условиях, следующих из* $|U^{(i)}(x, 0, \mu) - U(x, 0, \mu)| < K^{(i)}\mu^{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $K^{(i)}$ — *постоянные.*

Тогда существует такое μ, *что при всех* $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$ *и* x, t, *взятых из интервала* $X \cdot T \sim 1/\mu$, $|U^{(m)}(x, t, \mu) - U(x, t, \mu)| < M^{(m)}\mu^m$ $(X = X_2 - X_1)$. *Величина постоянной* $M^{(m)}$ *зависит от* $\max |g^{(m)}(x, t, \chi, \tau)|$, *оценка которого представляет самостоятельный интерес.*

Аналогичное утверждение справедливо для параболической системы

$$U_t + A(U, x, t, \chi, \tau) U_x + B(U, x, t, \chi, \tau) = \sum_{k=1} \mu^k f_k(U, x, t, \chi, \tau),$$

удовлетворяющей в области $-\infty < U, x, \chi < \infty$, $0 \leqslant t, \tau < \infty$, требованиям: 1) A, B, f_k $(m + 1)$ раз непрерывно дифференцируемы по U, и 1 раз по x, t и χ, t; 2) существует решение $U(x, t, \mu)$ этой системы класса C^1; 3) выполнено условие (*); 4) A — симметричная матрица.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском государственном университете
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
21 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Б. Мигдал, В. П. Крайнов, Приближенные методы квантовой механики «Наука», 1966. [2] Н. Н. Моисеев, Асимптотические методы нелинейной механики, «Наука», 1969. [3] С. М. Рытов, Тр. Физ. инст. им. П. Н. Лебедева АН СССР, 2, 41 (1940). [4] Н. Н. Боголюбов, Сборн. тр. Инст. строительной механики АН УССР, № 10, 1949. [5] М. И. Рабинович, ДАН, **191**, № 6, 1253 (1970). [6] Ю. А. Митропольский, Б. И. Мосеенков, Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных, Киев, 1969. [7] Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер, Уравнения в частных производных, М., 1966.