Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 1

УДК 517.947.5.37

*МАТЕМАТИКА*

А. А. АНДРОЩУК

# ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

*(Представлено академиком И. Н. Векуа 29 X 1970)*

В работе ([1]) доказана теорема единственности в обратной задаче спектрального анализа для дифференциального уравнения

$$y''+q(x)y+\lambda y=0 \quad (0\leqslant x<\infty), \quad y'(0)-py(0)=0$$

($q(x)$ и $p$ вещественные) в постановке с заданием спектральной функции. Ф. С. Рофе-Бекетовым ([2]) исследовалась аналогичная обратная задача, в которой $q(x)$ и $p$ — ограниченные самосопряженные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$. Для уравнения Шредингера, рассматриваемого в некоторой области, теорема единственности впервые была доказана Ю. М. Березанским ([3]). Если эта область — полуплоскость, то уравнение Шредингера можно интерпретировать как операторное, в котором функция $q(x)$ равна $A-c(x)$, где $A$ — самосопряженный полуограниченный сверху оператор в $L_2(-\infty,\infty)$, а $c(x)$ — ограниченный самосопряженный оператор.

В данной заметке доказывается теорема единственности для случая, когда $q(x)$ является неограниченным оператором вида $q(x)=A-c(x)$, где $A$ — самосопряженный полуограниченный снизу оператор в $H$ (гиперболический случай), а $c(x)$ — самосопряженный ограниченный оператор. Для доказательства этой теоремы развивается аппарат операторов преобразования, аналогичный построенному в ([4], [5], [1], [2]). Рассматриваемый случай охватывает, например, задачи на собственные значения для некоторого класса гиперболических уравнений.

1. Пусть $H$ — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u''+Au-c(x)u+\lambda u=0 \tag{1}$$

с начальными условиями $u(0)=h$, $u'(0)=g$, причем для простоты изложения в дальнейшем полагаем $g=0$; $c(x)$ — сильно непрерывная операторнозначная функция, значениями которой являются ограниченные операторы в $H$; $\lambda$ — комплексное число; $A$ — самосопряженный полуограниченный снизу оператор в $H$. Без ограничения общности можно считать, что $A>0$ и оператор $A^{-1}$ ограничен.

На множестве $H_+=D(A)$ ($D(A)$ — область определения оператора $A$) введем скалярное произведение $(f,g)_+=(Af,Ag)$. Тогда $H_+$ становится полным гильбертовым пространством относительно $(\cdot,\cdot)_+$ и его можно считать пространством с позитивной нормой по отношению к $H_0=H$ (см. ([6])). Обозначим $H_-$ пространство с негативной нормой, построенное по $H_+$ и $H_0$.

Вектор-функцию $u(x)$ со значениями в $H_0$ будем называть с л а б ы м р е ш е н и е м у р а в н е н и я (1), если $u(x)$ дважды слабо дифференцируема в $H_-$ (т. е. скалярная функция $(u(x),f)$ два раза дифференцируема при любом $f\in H_+$) и

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u(x),f)+(u(x),Af)-(u,c(x)f)+\lambda(u(x),f)=0.$$

Методом последовательных приближений убеждаемся, что интегральное уравнение

$$\omega(x,\lambda) = \cos\sqrt{A+\lambda I}\,x + \int_0^x \frac{\sin\sqrt{A+\lambda I}\,(x-t)}{\sqrt{A+\lambda I}}\,c(t)\,\omega(t,\lambda)\,dt$$

($I$ — тождественный оператор в $H_0$) имеет решение в классе сильно непрерывных операторных функций. Если $h\in H_0$, то задача Коши $u(0)=h$, $u'(0)=0$ для уравнения (1) имеет единственное слабое решение $u(x,\lambda)=\omega(x,\lambda)h$. Используя это, можно доказать существование оператора прямого преобразования.

Теорема 1. *Пусть $c(x)$ и $A^{1/2}c(x)A^{-1/2}$ — сильно непрерывные оператор-функции.*

*Тогда существует ядро $K_1(x,t)$, являющееся слабо непрерывной по $x$, $t$ оператор-функцией и при каждом $x$, $t$ ограничено действующее из пространства $H_0$ в $H_-$ такое, что*

$$u(x,\lambda) = h\cos\sqrt{\lambda}\,x + \int_0^x K_1(x,t)\,h\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt \quad (h\in H_0).$$

2. Обозначим $H_+(x) = D(A^2e^{\sqrt{A}x}A^2)$ $(x\in[0,\infty))$ полное гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$(f,g)_+(x) = (A^2e^{\sqrt{A}x}A^2f, A^2e^{\sqrt{A}x}A^2g).$$

Его можно считать пространством с позитивной нормой по отношению к $H_0$. Введем $H_-(x)$-пространство с негативной нормой, построенное по $H_+(x)$ и $H_0$. Получаем цепочку пространств $\Phi'\supseteq H_0\supseteq\Phi$, где $\Phi=\bigcap_{x\in[0,\infty)} H_+(x)$, $\Phi'=\bigcup_{x\in[0,\infty)} H_-(x)$. Вектор-функция

$$V(x,y) = \cos\sqrt{\lambda}\,x\,u(y,\lambda) \quad (x,y\geqslant 0)$$

со значениями в $H_0$ является решением уравнения

$$V_{xx}-V_{yy}-AV+c(y)V=0, \quad V(0,y)=u(y,\lambda), \quad V_x(0,y)=0.$$

Решая это уравнение, выразим вектор-функцию $V(x,y)$ с помощью некоторого интегрального оператора через $u(y,\lambda)$. Полагая в этом представлении $y=0$, получим оператор обратного преобразования.

Теорема 2. *Пусть $A^{1/2}c(x)A^{-1/2}$ и $Ae^{\sqrt{A}t}c(x)\,(At^{\sqrt{At}})^{-1}$ $(x,t\geqslant 0)$ — сильно непрерывные операторные функции, причем $c(x)$ дважды сильно дифференцируема.*

*Тогда существует ядро $K_2(x,t)$, являющееся слабо непрерывной по $x,t$ оператор-функцией и при каждом $x,t$ ограничено действующее из пространства $H_0$ в $\Phi'$, такое, что*

$$h\cos\sqrt{\lambda}\,x = u(x,\lambda) + \int_0^x K_2(x,t)\,u(t,\lambda)\,dt \quad (h\in H_0).$$

3. Теперь при помощи теорем 1 и 2 можно доказать существование операторов преобразования для уравнения (1) с коэффициентами соответственно $c_1(x)$ и $c_2(x)$, связывающие слабые решения $u_1(x,\lambda)$ и $u_2(x,\lambda)$.

Теорема 3. *Пусть $A^{1/2}c_j(x)A^{-1/2}$, $Ae^{\sqrt{A}t}c_j(x)\,(Ae^{\sqrt{A}t})^{-1}$ и $Ae^{\sqrt{A}t}A^{1/2}c_j(x)\times$ $\times(Ae^{\sqrt{A}t}A^{1/2})^{-1}$ $(j=1,2;\ x,t\geqslant 0)$ — сильно непрерывные оператор-функции, причем $c_j(x)$ $(j=1,2)$ дважды сильно дифференцируема.*

*Тогда существует ядро $K_{2,1}(x,t)$, являющееся слабо непрерывной по $x,t$ оператор-функцией и при каждом $x,t$ ограничено действующее из пространства $H_0$ в $\Phi'$, такое, что*

$$u_2(x,\lambda) = u_1(x,\lambda) + \int_0^x K_{2,1}(x,t)\,u_1(t,\lambda)\,dt. \quad (2)$$

*Аналогично выражается $u_1(x,\lambda)$ через $u_2(x,\lambda)$ с помощью ядра $K_{1,2}(x,t)$.*

4. Обозначим $L_2(H, (0, b))$ $(0 < b \leqslant \infty)$ множество всех вектор-функций $u(x)$ $(0 \leqslant x < b)$ со значениями в $H$ таких, что $\int\limits_0^b \|u(x)\|^2 dx < \infty$.

Как известно, $L_2(H, (0, b))$ является полным гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u, v)_b = \int\limits_0^b (u(x), v(x))\, dx \qquad (u, v \in L_2(H, (0, b))).$$

Введем $\omega$-преобразование

$$\tilde{f}(\lambda) = \int\limits_0^b f(x)\, \omega(x, \hat{\lambda})\, dx \qquad (f(x)\, l \in L_2(H, (0, b)),\ l \in H),$$

где $f(x)$ — произвольная кусочно-непрерывная оператор-функция.

Известно ([7]), что существует операторная спектральная функция $\rho(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ уравнения (1) с начальными условиями $u(0) = h$, $u'(0) = 0$ такая, что для любых кусочно-непрерывных операторных функций $f(x)$ и $g(x)$ выполняется

$$\int\limits_0^b f(x)\, g^*(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\, d\rho(\lambda)\, \tilde{g}^*(\lambda). \tag{3}$$

Обозначим $\rho_j(\lambda)$ $(j = 1, 2)$ спектральные функции уравнения (1) с коэффициентами соответственно $c_1(x)$ и $c_2(x)$.

Теорема 4. *Пусть для уравнения* (1) *выполнены все условия теоремы* 3. *Если при этом* $\rho_1(\lambda) = \rho_2(\lambda)$, *то* $c_1(x) = c_2(x)$ *при* $x \in [0, b)$.

Доказательство этой теоремы единственности проводится подобно доказательству в ([1]), используя оператор преобразования (2) и равенство Парсеваля (3).

5. Сформулируем изложенные выше результаты для гиперболического уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} - c(x, y)\, u + \lambda u = 0 \tag{4}$$

в полуплоскости с начальными условиями $u(0, y) = h(y)$, $u_x(0, y) = 0$. Обозначим $\Lambda$ минимальный оператор, порожденный в $L_2(-\infty, \infty)$ выражением $-\dfrac{d^2}{dy^2} + \varepsilon$ ($\varepsilon$ — положительная константа). Теперь вместо уравнения (4) можно рассматривать абстрактное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка вида (1), где $A = \Lambda$. Предполагается, что оператор-функция $c(x) = c(x, \cdot)$ при каждом $x$ является ограниченным оператором в $H_0 = L_2(-\infty, \infty)$ и $h \in L_2(-\infty, \infty)$. Таким образом, теоремы 1 — 4 легко сформулировать для уравнения (4).

Ограничения, накладываемые на функцию $c(x, y)$ и являющиеся достаточными для доказательства существования операторов преобразования, можно подать и в обычных терминах оператора дифференцирования $i\dfrac{d}{dy}$, построив при этом соответствующее оснащение пространства $H_0 = L_2(-\infty, \infty)$, подобное предыдущему.

Теорема 5. *Пусть функции* $c_j(x, y)$ $(j = 1, 2;\ x \geqslant 0,\ -\infty < y < \infty)$ *дважды непрерывно дифференцируемы по* $x$ *и при каждом* $x$ *являются ограниченными аналитическими функциями в некоторой полосе* $-a_1 \leqslant \sigma \leqslant a_2$ *комплексной плоскости* $z = y + i\sigma$.

*Тогда существует ядро* $\hat{K}_{2,1}(x, t)$, *являющееся слабо непрерывной по* $x, t$ *оператор-функцией и при каждом* $x, t$ *ограниченно действующее из про-*

*странства* $L_2(-\infty, \infty)$ *в* $\Phi'$, *такое, что*

$$u_2(x, \lambda) = u_1(x, \lambda) + \int_0^x \hat{K}_{2,1}(x, t)\, u_1(t, \lambda)\, dt.$$

*Аналогично выражается* $u_1(x, \lambda)$ *через* $u_2(x, \lambda)$.

Теперь с помощью теоремы 5 доказывается теорема единственности.

Теорема 6. *Пусть для уравнения* (4) *выполнены все условия теоремы* 5. *Если при этом* $\rho_1(\lambda) = \rho_2(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, *то* $c_1(x, y) = c_2(x, y)$ $(0 \leqslant x < b,\ -\infty < y < \infty)$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Ю. М. Березанскому за руководство работой, а также М. Л. Горбачуку за неоднократное ее обсуждение.

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
6 X 1970

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Марченко, Тр. Московск. матем. общ., 1, 327 (1952). [2] Ф. С. Рофе-Бекетов, Матем. сборн., 51 (93), № 3, 293 (1960). [3] Ю. М. Березанский, Тр. Московск. матем. общ., 7, 3 (1958). [4] А. Я. Повзнер, Матем. сборн., 23 (65), № 1, 3 (1948). [5] Б. М. Левитан, УМН, 4, № 1, 3 (1949). [6] Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965. [7] В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, ДАН, 184, № 4, 774 (1969).