Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 6

УДК 517.946.8+621.371+534.2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

М. И. РАБИНОВИЧ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком А. В. Гапоновым-Греховым 26 IX 1969)

В данной работе рассматривается асимптотический метод исследования колебательных и волновых процессов в слабонелинейных распределенных системах, аналогичный асимптотическому методу Боголюбова для сосредоточенных систем (1). Обсуждаются проблемы, касающиеся лишь одномерных систем, хотя общий подход и некоторые результаты могут быть перенесены и на пространственно неодномерные системы.

Как известно, метод Боголюбова может быть непосредственно применен для исследования ограниченных слабонелинейных распределенных систем (2–4). Для этого одночастотное решение представляется в виде суммы нормальных колебаний, параметры которых — медленные функции времени — описываются системой уравнений в обыкновенных производных. Существует, однако, широкий класс задач, для которых указанный подход не является адэкватным, и его применение затруднительно. Это проблемы, связанные с распространением и взаимодействием волн в слабонелинейных системах с дисперсией (в том числе и ограниченных, если длины волн много меньше длины системы).

В предлагаемом методе параметры приближенного решения нелинейной задачи считаются медленными функциями не только времени, но и координаты, и для них получаются приближенные уравнения в частных производных. Следует отметить, что для ряда конкретных задач уже использовались различные варианты укороченных уравнений в частных производных (3–11). В данной работе предлагается родственный методу усреднения метод получения этих уравнений в общем случае *.

Обычно уравнения, описывающие поля в слабонелинейной среде (или движение непрерывной среды), можно представить в виде

$$a_k \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{l=1}^{n} \left(a_{kl} \frac{\partial}{\partial x} + b_{kl} \right) u_l = \mu f_k^{(1)} (u, u_x', u_t', \tau, \chi, t, x) + \mu^2 f_k^{(2)} + \ldots,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n, \quad \tau = \mu t, \quad \chi = \mu x, \quad \mu \ll 1, \tag{1}$$

где функции $f_k^{(i)}$ — полиномы по u, u_x', u_t' и быстро осциллирующие периодические функции по явно входящим x и t.

При $\mu = 0$ система (1) имеет решения в виде бегущих волн

$$u_k \sim \psi_k^m e^{i(\omega t - kx)} + \text{компл. сопр.}, \tag{2}$$

где ψ_k^m определяются из системы

$$\sum_{l=1}^{n} (a_k \omega \delta_{kl} - a_{kl} k_m - i b_{kl}) \psi_l^m = 0, \tag{3}$$

* Подобный подход в связи с методом усреднения впервые был предложен А. В. Гапоновым и автором в 1968 г.

а связь между комплексными частотой ω и волновым числом $k = 2\pi / \lambda$ (λ — длина волны) определяется дисперсионным уравнением

$$\mathrm{Det} \, \| a_k \omega \delta_{kl} - a_{kl} k_m - i b_{kl} \| \equiv D(\omega, k) = 0; \tag{4}$$

здесь m — индекс нормальной волны (ветви дисперсионного уравнения). Предполагается, что при $\mu = 0$ в системе существуют распространяющиеся волны, т. е., если ω, k комплексны, то $\mathrm{Im}\,\omega / \mathrm{Re}\,\omega \sim \mathrm{Im}\,k / \mathrm{Re}\,k \sim \mu$.

При $\mu \neq 0$ многоволновое решение — результат взаимодействия квазигармонических волн (волновых пакетов со спектральной шириной $\Delta\omega / \omega \sim \Delta k / k \sim \mu$) ищется в виде

$$u_k = \sum_{s=1}^{q} \left\{ \sum_{m=1}^{r} \psi_k^m (\omega_s) A_s^m (\tau, \chi) \exp \{ i [\omega_s t - k_m (\omega_s) x + \varphi_s^m (\tau, \chi)]\} + \right.$$
$$\left. + \text{компл. сопр.} \right\} + \mu w_k^{(1)} (\tau, \chi, x, t) + \mu^2 w_k^{(2)} (\tau, \chi, x, t) + \ldots$$
$$\ldots + \mu^n w_k^{(n)} (\tau, \chi, x, t) + \ldots, \tag{5}$$

где ω и k удовлетворяют (4), а $w_k^{(n)}$ — периодические функции явно входящих переменных x, t. В решении (5) должны быть учтены те возникающие из-за нелинейности волны, которые находятся в резонансе (по пространственному и временному периодам) с нормальными волнами линейной системы.

Уравнения для неизвестных функций $A(\tau, \chi)$ и $\varphi(\tau, \chi)$ ищем в виде

$$\partial A_s^m / \partial t = \mu F_1^{sm} \{A, \varphi, \tau, \chi\} + \mu^2 F_2^{sm} \{A, \varphi, \tau, \chi\} + \ldots,$$
$$\partial \varphi_s^m / \partial t = \mu \Phi_1^{sm} \{A, \varphi, \tau, \chi\} + \mu^2 \Phi_2^{sm} \{A, \varphi, \tau, \chi\} + \ldots \tag{6}$$

Здесь F и Φ — неизвестные дифференциальные операторы в частных производных. Решение (5) можно определить с любой наперед заданной степенью точности, если найти неизвестные периодические функции $w_k^{(n)}(x, t)$ и раскрыть вид операторов F_n, Φ_n. Уравнения для $w_k^{(n)}$ найдем из (1), подставив туда (5) и (6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ:

$$a_k \frac{\partial w_k^{(1)}}{\partial t} + \sum_{l=1}^{n} \left(a_{kl} \frac{\partial}{\partial x} + b_{kl} \right) w_l^{(1)} = h_k^{(1)} (\tau, \chi, x, t),$$

$$h_k^{(1)} = - \sum_{s=1}^{q} \exp (i \omega_s t) \left\{ \sum_{m=1}^{r} \exp [- i (k_m x - \varphi_s^m)] \left[\left(a_k \psi_k^m F_1^{sm} + \right. \right. \right.$$
$$\left. + \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \psi_l^m \frac{\partial A_s^m}{\partial \chi} \right) + i A_s^m \left(a_k \psi_k^m \Phi_1^{sm} + \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \psi_l^m \frac{\partial \varphi_s^m}{\partial \chi} \right) \Big] +$$
$$\left. + \text{к. с.} \right\} + f_k^{(1)} (u^0, u_x^{0'}, u_t^{0'}, \tau, \chi, x, t); \tag{7}$$

. . . .

$$a_k \frac{\partial w_k^{(n)}}{\partial t} + \sum_{l=1}^{n} \left(a_{kl} \frac{\partial}{\partial x} + b_{kl} \right) w_l^{(n)} = h_k^{(n)} (\tau, \chi, x, t),$$

$$h_k^{(n)} = - a_k \frac{\partial w_k^{(n-1)}}{\partial \tau} - \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \frac{\partial w_l^{(n-1)}}{\partial \chi} + \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{n!} f_{k_{u_l}}^{(1)^n} w_l^{(n)} + \ldots$$
$$\ldots + \sum_{l=1}^{n} f_{k_{u_l}}^{(n-1)'} w_l^{(1)} - a_k \sum_{s=1}^{q} \exp (i \omega_s t) \sum_{m=1}^{r} \exp [- i (k_m x - \varphi_s^m)] \times$$
$$\times \psi_k^m (F_n^{sm} + i A_s^m \Phi_n^{sm}) + f_k^{(n)} (u^0, u_x^{0'}, u_t^{0'}, \tau, \chi, x, t); \tag{8}$$

где u^0 определяется из (5) при $w^{(i)}=0$. Далее воспользуемся периодичностью правых частей этих уравнений по x и t и представим их в виде

$$h_k(\tau,\chi,x,t)=\sum_{s=1}^{q}\left(\sum_{m=1}^{r}H_k^{sm}(\tau,\chi,\omega,k)\exp(-ik_mx)\right)\exp(i\omega_st)+$$
$$+\sum_{d=1}^{d_0}\left(\sum_{l=1}^{l_0}H_k^{dl}(\tau,\chi,\omega,k)\exp(-ik_lx)\right)\exp(i\omega_dt)+\text{к. с.}\tag{9}$$

В первую группу членов здесь выделены слагаемые, соответствующие собственным волнам системы,— для них

$$D(\omega_s,k_m)=0,\tag{10}$$

во вторую — возникающие из-за нелинейности волны, которые не резонансны с первыми, для них

$$D(\omega_d,k_l)\neq 0.\tag{11}$$

Функции $H_k{}^{ab}$ определяются как коэффициенты Фурье $\left(ab\begin{smallmatrix}\nearrow sm\\ \searrow dl\end{smallmatrix}\right)$

$$H_k^{ab}=\frac{1}{T\Lambda}\int\limits_t^{t+T}\int\limits_x^{x+\Lambda}h_k(\tau,\chi,x\,t)\exp[-i(\omega_at-k_bx)]\,dx\,dt.\tag{12}$$

Периодические функции $w_k(x,t)$ также представляются в виде (9) ($h_k\to w_k$, $H_k\to W_k$). После подстановки выражения для w_k и h_k в (7), (8) получим, приравнивая коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, неоднородную систему алгебраических уравнений для определения $W_k^{(n)}$. Амплитуды $W_k^{(1)dl}$, согласно (11), ограничены и равны $W_k^{(1)dl}=\sum\limits_{j=1}^{n}D_{jk}H_j^{(1)dl}/D(\omega_d,k_l)$ (D_{jk} — минор D). Ограниченные же решения для $W_k^{(1)sm}$, ввиду (10), могут существовать, как известно, лишь при выполнении условий ортогональности

$$\sum_{l=1}^{n}\zeta_l^m(\omega_s)\,H_l^{(1)sm}=0,\quad s=1,2,\ldots,q,\quad m=1,2,\ldots,r,\tag{13}$$

где $\zeta_l{}^m$ — собственные функции сопряженной с (3) системы. Из этих условий, учитывая (7), (9), найдем искомые функционалы $F_1{}^{sm}$ и Φ_1^{sm} и получим уравнения первого приближения

$$\begin{aligned}&\partial A_s^m/\partial t+v_{\text{гр}}^m(\omega_s)\,\partial A_s^m/\partial x=\mu\,\mathrm{Re}\,f_{sm}^{(1)},\\&\partial\varphi_s^m/\partial t+v_{\text{гр}}^m(\omega_s)\,\partial\varphi_s^m/\partial x=(\mu/A_s^m)\,\mathrm{Im}\,f_{sm}^{(1)},\end{aligned}\tag{14}$$

где

$$f_{sm}^{(i)}=(\gamma_m/D'_p)\sum_{l=1}^{n}\zeta_l^mf_l^{(i)sm},\ \gamma_m=\text{const},$$

$$f_l^{(i)sm}=\frac{1}{T\Lambda}\int\limits_t^{t+T}\int\limits_x^{x+\Lambda}f_l^{(i)}(u^0,u_x^{0'},u_t^{0'},\tau,\chi,x,t)\exp[-i(\omega_st-k_mx+\varphi_s^m)]\,dx\,dt,$$

а $v_{\text{гр}}=D_\varkappa'/D_p'$ — величина, обычно называемая групповой скоростью ($p=i\omega$, $\varkappa=-ik$), причем в диспергирующей системе $v_{\text{гр}}=d\omega/dk\neq$ $\neq v_\Phi=\omega/k$. Заметим, что уравнения (14) получены в случае, когда при $\mu=0$ ω_s и k_m действительны. Если же ω_s (либо k_m) комплексно, $\omega_s=$ $=\omega_s'+i\sigma_s$, то, вводя новую переменную $A_s^m=A_{s\text{стар}}^m e^{-\sigma_st}$, получим для нее уравнение с тем лишь отличием от (14), что в его правой части присутствует дополнительное слагаемое $A_s{}^m\sigma_s$.

Для построения уравнений второго приближения относительно A_s^m и φ_s^m необходимо определить функции $W_k^{(1)sm}$. Воспользовавшись (7), (14), найдем

$$W_k^{(1)\,sm} = e^{i\varphi_s^m}\left[\psi'_{k_\chi} - v_{\text{гр}}^m(\omega_s)\,\psi'_{k_p}\right]\left(\frac{\partial A_s^m}{\partial \chi} + iA_s^m\frac{\partial \varphi_s^m}{\partial \chi}\right) + $$
$$+ \frac{1}{D'_p}\sum_{l=1}^{n}\left[D'_{lk_p} f_l^{(1)\,sm} - \frac{\partial}{\partial p}(a_l D_{lk}\psi_l)\, f_{sm}^{(1)}\right].$$

Из условия ограниченности $W_k^{(2)}$ (см. (13)) определяются F_{2s}^m и Φ_{2s}^m, что позволяет найти уравнения второго приближения. Они оказываются параболическими и записываются в виде *

$$\frac{\partial a_s^m}{\partial t} + v_{\text{гр}}^m(\omega_s)\frac{\partial a_s^m}{\partial x} - \frac{i}{2}\left.\frac{d^2\omega}{dk^2}\right|_{\omega_s k_m}\frac{\partial^2 a_s^m}{\partial x^2} = \mu f_{sm}^{(1)} + \mu^2\left\{f_{sm}^{(2)} + [f_u^{(1)} w^{(1)}]_{sm} + \right.$$
$$+ [f_{u_x}^{(1)'}(u_\chi^0 + w_x^{(1)'})]_{sm} + [f_{u_t'}^{(1)'}(u_\tau^{0'} + w_t^{(1)'})]_{sm} - \frac{1}{D'_p}\left[\left(\frac{D''_{pp}}{2} + \frac{\partial}{\partial p}\right)\times\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{\partial}{\partial \tau} f_{sm}^{(1)} + v_{\text{гр}}^m(\omega_s)\frac{\partial}{\partial \chi} f_{sm}^{(1)}\right) + \rho\frac{\partial}{\partial \chi} f_{sm}^{(1)}\right]_{\omega_s,\,k_m}\right\}. \qquad (15)$$

Здесь $a_s^m = A^m \exp(i\varphi_s^m)$ — комплексная амплитуда волны;

$$[f_{u_x'}^{(1)'}(u_\chi^{0'} + w_x^{(1)'})]_{sm} = \frac{\gamma_m}{T\Lambda D'_p}\int_t^{t+T}\int_x^{x+\Lambda}\sum_{k=1}^{n}\zeta_k^m\sum_{l=1}^{n} f_{k_{u_x'}}^{(1)'}\left(\frac{\partial w_l^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u_l^0}{\partial \chi}\right)\times$$
$$\times \exp\left[-i(\omega_s t - k_m x + \varphi_s^m)\right] dx\, dt,$$

$[f_u^{(1)'} w^{(1)}]_{sm}$ и $[f_{u_t'}^{(1)'}(u_\tau^0 + w_t^{(1)'})]_{sm}$ определяются аналогично. В (15), помимо $v_{\text{гр}}$, входит еще один параметр, характеризующий дисперсию в системе, $d^2\omega / dk^2 = \beta$. Если в данной спектральной области $\beta = 0$, то уравнения второго приближения также оказываются гиперболическими, отличаясь от (14) слагаемыми типа $f(a)\partial a / \partial x$, $f(a)\partial a / \partial t$. Другой весьма важный для приложений случай — когда $\beta \neq 0$ и $f_k^{(1)} = 0$. Он соответствует рассмотрению широких волновых пакетов $-\Delta\omega / \omega \sim \Delta k / k \sim \mu$, в то время как $f_k \sim f_k^{(2)} \sim \mu^2$. При этом (15) отличаются по виду от уравнений первого приближения лишь наличием члена со второй производной.

Уравнения более высоких приближений строятся аналогично (15). Вопрос же о сходимости предложенного асимптотического метода пока остается открытым.

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском государственном университете

Поступило 22 IX 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Боголюбов, Сборн. тр. Инст. строительной механики АН УССР, № 10, 1949. [2] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., 1963. [3] Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, «Наука», 1964. [4] Ю. А. Митропольский, Б. И. Мосеенков, Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных, Киев, 1968. [5] М. И. Рабинович, Е. И. Якубович, Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 8, № 5, 987 (1966). [6] М. И. Рабинович, Докл. на I Вавиловской конференции по нелинейной оптике, Новосибирск, июнь, 1969. [7] Л. А. Островский, ЖЭТФ, 51, № 10, 1189 (1966). [8] М. И. Рабинович, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, 57, № 4, 1308 (1969). [9] С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, Изд. АН СССР, 1964. [10] Н. Бломберген, Нелинейная оптика, М., 1966. [11] В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, «Наука», 1967.

* При выводе (15) учтено, что

$$\rho = \gamma_n \sum_{l=1}^{n}\zeta_l\left[a_l\,(2\psi'_{l_p} v_{\text{гр}}^m - \psi'_{l_\chi}) - \sum_{q=1}^{n} a_{l_q}\psi'_{q_p}\right], \quad \frac{\partial}{\partial p} f_l^{sm} \equiv 0.$$