Алгебра и логика, 49, № 5 (2010), 591—614

УДК 512.542.4

$\mathfrak{X}$-КОРОНА КОНЕЧНОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

С. Ф. КАМОРНИКОВ, Л. А. ШЕМЕТКОВ

Введение

Понятие короны конечной разрешимой группы G введено в работе [1], посвященной префраттиниевым подгруппам. Анализируя нормальную структуру группы G, там было показано, что для любого её дополняемого главного фактора H/K в G существует такая нормальная секция C/R (она называется *короной* главного фактора H/K и обозначается через $Cr_G(H/K)$), что

1) $C = C_G(H/K)$;

2) R — пересечение ядер всех тех максимальных подгрупп группы G, которые дополняют H/K;

3) $C/R = \mathrm{Soc}(G/R)$;

4) каждая минимальная нормальная подгруппа группы G/R дополняема и G-изоморфна H/K;

5) длина G-главного ряда группы C/R равна числу всех G-изоморфных H/K дополняемых главных факторов любого главного ряда группы G;

6) $Cr_G(H/K)$ дополняема в G, и любые два её дополнения сопряжены.

Понятно, что при автоморфизме α группы G дополняемые главные факторы H/K и H^α/K^α не обязаны быть G-изоморфными, а потому корона главного фактора H/K в общем случае не является автоморфно допустимой секцией группы G, т. е. не всегда имеет место $C/R = C^\alpha/R^\alpha$.

В связи с этим возникает вопрос: имеется ли аналог короны, который ведёт себя корректно при изоморфизмах групп, сохраняя свои основные свойства 1–6? Ответ на этот вопрос в настоящей работе воплощается в конструкции $F_{\mathfrak{X}}(G)/\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$, определяемой для любого класса $\mathfrak{X}$ примитивных групп и называемой $\mathfrak{X}$-короной группы G. Особое внимание уделяется случаю, когда все группы из $\mathfrak{X}$ обладают одинаковой цокольной длиной, что имеет место, напр., в принципиально важной для приложений ситуации однопорождённого класса $\mathfrak{X}$.

Примечательны и сами подгруппы $F_{\mathfrak{X}}(G)$ и $\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$. Они рассматриваются как обобщённая подгруппа Фиттинга и обобщённая подгруппа Фраттини группы G. Связано это не только с тем, что указанные подгруппы в случае, когда $\mathfrak{X}$ — класс всех примитивных групп, совпадают с подгруппами $F(G)$ и $\Phi(G)$. В большей мере это определяется тем, что они наследуют целый ряд ключевых свойств подгрупп Фиттинга и Фраттини. Скажем, подгруппа $F_{\mathfrak{X}}(G)$ совпадает с пересечением централизаторов всех дополняемых $\mathfrak{X}$-центральных главных факторов (теор. 2), а подгруппа $\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$ совпадает с пересечением вполне определённого множества максимальных подгрупп группы G (лемма 2).

Как и в случае корон дополняемых главных факторов, $\mathfrak{X}$-короны группы G дополняемы для любого примитивного класса $\mathfrak{X}$ (теор. 1). К сожалению, ожидать сопряжённость всех дополнений $\mathfrak{X}$-короны группы G в общем случае не приходится. На это указывают простые примеры. Но для однопорождённого примитивного класса $\mathfrak{X} = (H)$ все дополнения $\mathfrak{X}$-короны $Cr(G, \mathfrak{X})$ сопряжены (теор. 4).

В [1] понятие короны было использовано для определения префраттиниевой подгруппы как пересечения системы дополнений всех её корон. Позже идея префраттиниевой подгруппы Гашюца многократно обобщалась. Наиболее яркое её развитие см. в [2], где подход Гашюца связан с насыщенной формацией $\mathfrak{F}$ и рассмотрены пересечения дополнений не всех, а только $\mathfrak{F}$-эксцентральных корон группы G. Затем (см., напр., [3]) насыщенная формация $\mathfrak{F}$ была заменена произвольным классом групп. Так возникло и было развито общее понятие $\mathfrak{F}$-префраттиниевой подгруппы.

В настоящей работе показывается: каков бы ни был класс $\mathfrak{F}$, каждая $\mathfrak{F}$-префраттиниева подгруппа группы G может быть представлена в виде пересечения дополнений $\mathfrak{X}$-корон группы G для некоторой системы однопорождённых примитивных классов (теор. 5 и 6). Здесь же (след. 11) строится еще один базис, позволяющий получить все $\mathfrak{F}$-префраттиниевы подгруппы как произведения подгрупп из этого базиса.

По аналогии с [4] доказывается (теор. 7): если $\mathfrak{F}$ пробегает все классы групп, то $\mathfrak{F}$-префраттиниевы подгруппы группы G, определяемые некоторой системой дополнений Σ, образуют решётку $Pr(G, \Sigma)$. Устанавливается строение этой решётки: доказывается, что она изоморфна решётке всех подмножеств n-элементного множества, где n — максимальное число попарно не изоморфных примитивных факторгрупп группы G. В частности, решётка $Pr(G, \Sigma)$ является булевой, атомной и коатомной.

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы, поэтому под группой всегда подразумевается конечная разрешимая группа. Используются определения и обозначения, принятые в [5, 6]. Наиболее часто встречающиеся понятия поясняются по ходу изложения материала.

§ 1. $\mathfrak{X}$-корона

Напомним: если $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп, то через $R_0\mathfrak{X}$ обозначается *класс всех конечных подпрямых произведений групп из* $\mathfrak{X}$. Понятно, что $G \in R_0\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда в G существуют нормальные подгруппы N_i, $i = 1, 2, \dots, t$, для которых $G/N_i \in \mathfrak{X}$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{t} N_i = 1$. Класс $\mathfrak{X}$ называется *R_0-замкнутым*, если $R_0\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$.

ЛЕММА 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — R_0-замкнутый класс, содержащий единичную группу. Тогда для любой группы G множество*

$$\mathcal{S} = \{N \trianglelefteq G \mid G/N \in \mathfrak{X}\},$$

частично упорядоченное по включению, не пусто и имеет единственный минимальный элемент $\bigcap\{N \mid N \in \mathcal{S}\}$, который обозначается через $G^{\mathfrak{X}}$

и называется $\mathfrak{X}$-корадикалом группы G. Подгруппа $G^{\mathfrak{X}}$ характеристична в G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [5, с. 272]. □

Как следует из [5, лемма II.1.6], для любого класса $\mathfrak{X}$ класс $R_0(\mathfrak{X}, 1)$ является R_0-замкнутым и содержит единичную группу (через $(\mathfrak{X}, 1)$ обозначается класс, состоящий из $\mathfrak{X}$-групп и единичных групп). Поэтому лемма 1 гарантирует существование $R_0(\mathfrak{X}, 1)$-корадикала в любой группе.

В дальнейшем через $\mathcal{P}$ будем обозначать класс всех примитивных групп. Напомним, что группа называется *примитивной*, если она обладает максимальной подгруппой с единичным ядром. Как показано в [5], группа G примитивна тогда и только тогда, когда она обладает единственной минимальной нормальной подгруппой, которая дополняема в G. Это дополнение является максимальной подгруппой группы G и имеет единичное ядро. Если M — максимальная подгруппа группы G, то, очевидно, группа $G/\mathrm{Core}_G(M)$ примитивна.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый (возможно, пустой) подкласс класса $\mathcal{P}$. Такой подкласс будем называть *примитивным классом.* Через $\mathcal{P}(G)$ обозначим класс всех групп, изоморфных примитивным факторгруппам группы G (если $G = 1$, то $\mathcal{P}(G) = \varnothing$).

ЛЕММА 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый примитивный класс. Тогда*

$$G^{R_0(\mathfrak{X},1)} = \bigcap\{\mathrm{Core}_G(M) \mid M < \cdot\ G, G/\mathrm{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}\}$$

для любой группы G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в [5], запись $M < \cdot\, G$ означает, что M — максимальная подгруппа в G. Если $\mathcal{P}(G) \bigcap \mathfrak{X} = \varnothing$, то в G нет факторгрупп, принадлежащих $\mathfrak{X}$. В силу леммы 1, $G^{R_0(\mathfrak{X},1)} = G$ (здесь и далее будем считать, что пересечение пустого множества подгрупп совпадает со всей группой).

Пусть теперь $\mathcal{P}(G) \bigcap \mathfrak{X} \neq \varnothing$. Тогда найдётся по крайней мере одна факторгруппа G/N, принадлежащая $\mathfrak{X}$, а значит, и максимальная подгруппа M, для которой $G/\mathrm{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}$. Обозначим подгруппу

$$\bigcap\{\mathrm{Core}_G(M) \mid M < \cdot\, G,\ G/\mathrm{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}\}$$

через R. Ввиду леммы 1, $G^{R_0(\mathfrak{X},1)} \subseteq R$. Предположим, что $G^{R_0(\mathfrak{X},1)} \subset R$. По лемме 1 в G найдётся не содержащая R нормальная подгруппа N, для которой $G/N \in \mathfrak{X}$. Группа G/N примитивна, поэтому она обладает единственной минимальной нормальной подгруппой K/N. Поскольку N не содержит R, то $K/N \subseteq RN/N$. Подгруппа K/N дополняема в G/N, причём её дополнение S/N — максимальная подгруппа группы G/N и $\mathrm{Core}_{G/N}(S/N) = 1$. Отсюда следует, что S — максимальная подгруппа группы G, $\mathrm{Core}_G(S) = N$ и $G/\mathrm{Core}_G(S) \in \mathfrak{X}$. Значит, $R \subseteq \mathrm{Core}_G(S) = N$; противоречие. Следовательно, $G^{R_0(\mathfrak{X},1)} = R$. $\square$

Пересечение всех таких максимальных подгрупп M группы G, для которых $G/\mathrm{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}$, будем обозначать через $\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$ и называть $\mathfrak{X}$-*подгруппой Фраттини*. При этом полагаем, что $\Phi_{\mathfrak{X}}(G) = G$, если $G/\mathrm{Core}_G(M) \notin \mathfrak{X}$ для любой максимальной подгруппы из G. Из леммы 2 следует: если $\mathfrak{X}$ — примитивный класс, то $\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$ совпадает с $G^{R_0(\mathfrak{X},1)}$.

ЛЕММА 3. *Для любой группы G и любого примитивного класса $\mathfrak{X}$ справедливо равенство* $\Phi(G/\Phi_{\mathfrak{X}}(G)) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{P}(G) \bigcap \mathfrak{X} = \varnothing$, то $\Phi_{\mathfrak{X}}(G) = G$, а значит, в этом случае утверждение леммы верно.

Пусть теперь $\mathcal{P}(G) \bigcap \mathfrak{X} \neq \varnothing$, ϕ — естественный гомоморфизм группы G на $G/\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$, а Φ — полный прообраз подгруппы $\Phi(G/\Phi_{\mathfrak{X}}(G))$. В силу леммы 2 имеем

$$\Phi_{\mathfrak{X}}(G) = G^{R_0(\mathfrak{X},1)} \subseteq \Phi \subseteq \bigcap\{\mathrm{Core}_G(M) \mid M < \cdot G,\ G/\mathrm{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}\}.$$

Значит, $\Phi_{\mathfrak{X}}(G) = \Phi$. $\square$

Если α — естественный гомоморфизм группы G на G/N, то полный прообраз подгруппы Фиттинга $F(G/N)$ будем обозначать через $F(G \bmod N)$, а полный прообраз подгруппы Фраттини $\Phi(G/N)$ — через $\Phi(G \bmod N)$. Напомним, что секция A/B группы G называется *дополняемой*, если существует подгруппа H группы G, такая что $HA = G$ и $H \bigcap A = B$. При этом подгруппа H называется *дополнением* секции A/B в группе G.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\mathfrak{X}$ — *примитивный класс,* $\Phi = \Phi_{\mathfrak{X}}(G)$*,* $F = F(G \bmod \Phi)$*. Тогда*

1) $F/\Phi = \mathrm{Soc}(G/\Phi)$;

2) $C_{G/\Phi}(F/\Phi) = F/\Phi$;

3) F/Φ *дополняема в* G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы 3, $\Phi(G/\Phi) = 1$. Теперь утверждения 1–3 прямо следуют из [5, теор. A.10.6]. $\square$

ЛЕММА 4. *Пусть* $\mathfrak{X}$ — *примитивный класс. Если* $N \trianglelefteq G$ *и* $N \subseteq \Phi_{\mathfrak{X}}(G)$*, то* $\Phi_{\mathfrak{X}}(G/N) = \Phi_{\mathfrak{X}}(G)/N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{P}(G) \bigcap \mathfrak{X} = \varnothing$, то утверждение леммы очевидно.

Пусть $\mathcal{P}(G) \bigcap \mathfrak{X} \neq \varnothing$, M — максимальная подгруппа группы G, такая что $G/\mathrm{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}$. По лемме 2, $N \leq \mathrm{Core}_G(M)$, а значит,

$$G/N/\mathrm{Core}_{G/N}(M/N) = G/N/\mathrm{Core}_G(M)/N \cong G/\mathrm{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}.$$

Снова применяя лемму 1, получаем, что

$$\Phi_{\mathfrak{X}}(G/N) \leq \Phi_{\mathfrak{X}}(G)/N.$$

Пусть $\Phi_{\mathfrak{X}}(G/N) = \Phi/N$. В силу леммы 2,

$$\Phi/N = \bigcap \{\mathrm{Core}_{G/N}(H/N) \mid H/N < \cdot\, G/N,\ G/N/\mathrm{Core}_{G/N}(H/N) \in \mathfrak{X}\}.$$

Отсюда следует, что $G/\mathrm{Core}_G(H) \in \mathfrak{X}$, а значит, по лемме 2, $\Phi_{\mathfrak{X}}(G) \leq \Phi$. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{X}$ — примитивный класс. Секцию $F(G/\Phi_{\mathfrak{X}}(G))$ будем называть $\mathfrak{X}$-*короной* группы G и обозначать через $Cr(G, \mathfrak{X})$. Подгруппу $F(G \bmod \Phi_{\mathfrak{X}}(G))$ будем называть $\mathfrak{X}$-*подгруппой Фиттинга* группы G и обозначать как $F_{\mathfrak{X}}(G)$.

С учётом введённых обозначений $\mathfrak{X}$-корона группы G — это секция $F_{\mathfrak{X}}(G)/\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$. Ввиду теоремы 1, $Cr(G, \mathfrak{X})$ — цоколь группы $G/\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$.

Приведём теперь несколько примеров $\mathfrak{X}$-корон для конкретных примитивных классов $\mathfrak{X}$.

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathfrak{X} = \varnothing$. Тогда, очевидно, для любой группы G справедливы равенства: $\Phi_{\mathfrak{X}}(G) = G$, $F_{\mathfrak{X}}(G) = G$, $Cr(G, \mathfrak{X}) = 1$.

ПРИМЕР 2. В случае $\mathfrak{X} = \mathcal{P}$ имеем: $\Phi_{\mathcal{P}}(G) = \Phi(G)$, $F_{\mathcal{P}}(G) = F(G)$, $Cr(G, \mathcal{P}) = F(G)/\Phi(G)$.

ПРИМЕР 3. Пусть π — некоторое множество простых чисел, $\mathfrak{X}$ — класс всех примитивных групп, цоколь которых является π'-группой. В этом случае $F_{\mathfrak{X}}(G) = F(G \bmod \Phi_\pi(G))$, а $\Phi_{\mathfrak{X}}(G) = \Phi_\pi(G)$ совпадает с пересечением всех максимальных подгрупп группы G, индексы которых не делятся на числа из π. Кроме того, $\Phi_\pi(G) = \Phi(G \bmod O_\pi(G))$ (см., напр., [7]).

ПРИМЕР 4. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $\mathfrak{X}$ — класс всех примитивных групп, не принадлежащих $\mathfrak{F}$. Тогда $\Phi_{\mathfrak{X}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$, пересечению всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп группы G (описание строения подгруппы $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ см. в [6, 7]). В этом случае $Cr(G, \mathfrak{X}) = F(G \bmod \Delta^{\mathfrak{F}}(G))/\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$.

ПРИМЕР 5. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $\mathfrak{X}$ — класс всех примитивных групп, принадлежащих $\mathfrak{F}$. Тогда $\Phi_{\mathfrak{X}}(G) = \Phi(G \bmod G^{\mathfrak{F}})$, где $G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-корадикал группы G (см., напр., [7]). Значит, в данном случае

$$F_{\mathfrak{X}}(G) = F(G \bmod \Phi(G \bmod G^{\mathfrak{F}})).$$

§ 2. Характеризация $\mathfrak{X}$-подгруппы Фиттинга

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс групп. Напомним, что главный фактор H/K группы G называется $\mathfrak{F}$-*центральным* (см. [3]), если полупрямое произведение $[H/K](G/C_G(H/K))$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Если же $[H/K](G/C_G(H/K))$ не принадлежит $\mathfrak{F}$, то главный фактор H/K называется $\mathfrak{F}$-*эксцентральным.*

Нам понадобится следующая лемма, доказательство которой см., напр., в [3].

ЛЕММА 5. *Пусть H/K — дополняемый главный фактор группы G, M — дополнение фактора H/K в группе G. Тогда*

$$[H/K](G/C_G(H/K)) \cong G/\mathrm{Core}_G(M).$$

Из леммы 5, в частности, следует, что дополняемый главный фактор H/K является $\mathfrak{F}$-центральным в G тогда и только тогда, когда $G/\mathrm{Core}_G(M) \in \mathfrak{F}$, где M — дополнение для H/K в группе G.

ТЕОРЕМА 2. *Если $\mathfrak{X}$ — примитивный класс, то $F_{\mathfrak{X}}(G)$ равна пересечению централизаторов всех дополняемых $\mathfrak{X}$-центральных главных факторов группы G.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $\mathcal{P}(G)\bigcap\mathfrak{X} = \varnothing$ теорема очевидна. Будем считать, что $\mathcal{P}(G)\bigcap\mathfrak{X} \neq \varnothing$. Пусть H/K — дополняемый $\mathfrak{X}$-центральный главный фактор группы G, M — максимальная подгруппа группы G, дополняющая H/K. Ввиду [5, предлож. A.15.5], $C_G(H/K) = H\mathrm{Core}_G(M)$ и $H \cap \mathrm{Core}_G(M) = K$. Обозначим подгруппу $\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$ через Φ. Из леммы 2 следует, что

$$\Phi \leq \mathrm{Core}_G(M) \leq C_G(H/K).$$

Поэтому

$$H\Phi/K\Phi \cong H/H \cap K\Phi = H/K(H \cap \Phi) = H/K.$$

Таким образом, главные факторы $H\Phi/K\Phi$ и H/K являются G-изоморфными, а значит,

$$C_G(H/K) = C_G(H\Phi/K\Phi).$$

В свою очередь, G-изоморфными являются и главные факторы $(H\Phi/\Phi)/(K\Phi/\Phi)$ и $H\Phi/K\Phi$. Поэтому

$$C_G(H/K)/\Phi = C_{G/\Phi}(H\Phi/\Phi/K\Phi/\Phi).$$

Отсюда, в силу [6, след. 4.1.1] и теоремы 1 имеем

$$F_{\mathfrak{X}}(G)/\Phi = F(G/\Phi) \leq C_G(H/K)/\Phi.$$

Значит, подгруппа $F_{\mathfrak{X}}(G)$ содержится в пересечении централизаторов всех дополняемых $\mathfrak{X}$-центральных главных факторов группы G.

Докажем обратное включение. По лемме 3 подгруппа Фраттини группы G/Φ единична. Отсюда и из [5, теор. A.13.8] получаем равенство

$$F_{\mathfrak{X}}(G)/\Phi = K_1/\Phi \times \ldots \times K_t/\Phi,$$

где $K_1/\Phi, \dots, K_t/\Phi$ — дополняемые минимальные нормальные подгруппы группы G/Φ. Кроме того,

$$F_{\mathfrak{X}}(G)/\Phi = \bigcap_{i=1}^{t} C_{G/\Phi}(K_i/\Phi) = \left(\bigcap_{i=1}^{t} C_G(K_i/\Phi)\right)/\Phi.$$

Предположим, что K_i/Φ $\mathfrak{X}$-эксцентральна в G/Φ. Тогда

$$[K_i/\Phi]((G/\Phi/C_{G/\Phi}(K_i/\Phi)) \notin \mathfrak{X}.$$

Ввиду [3, лемма 3.29]

$$G/\Phi/\mathrm{Core}_{G/\Phi}(M/\Phi) \notin \mathfrak{X}$$

для любой максимальной подгруппы M/Φ группы G/Φ, дополняющей K_i/Φ. Следовательно, каждая максимальная подгруппа D/Φ группы G/Φ, для которой

$$G/\Phi/\mathrm{Core}_{G/\Phi}(D/\Phi) \in \mathfrak{X},$$

содержит K_i/Φ. Отсюда по лемме 2 имеем $K_i/\Phi \subseteq \Phi_{\mathfrak{X}}(G/\Phi)$. Ввиду леммы 4, $\Phi_{\mathfrak{X}}(G/\Phi) = 1$; противоречие. Таким образом, для любого $i = 1, \dots, t$ подгруппа K_i/Φ $\mathfrak{X}$-центральна в G/Φ, а значит, K_i/Φ — дополняемый $\mathfrak{X}$-центральный главный фактор группы G. Как показано выше,

$$F_{\mathfrak{X}}(G) = \bigcap_{i=1}^{t} C_G(K_i/\Phi).$$

Итак, пересечение централизаторов дополняемых $\mathfrak{X}$-центральных главных факторов содержится в $F_{\mathfrak{X}}(G)$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для любой группы G подгруппа $F(G)$ равна пересечению централизаторов всех дополняемых главных факторов группы G.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для любой группы G, не являющейся π-группой, пересечение централизаторов всех дополняемых главных π'-факторов группы G равно $F(G \bmod \Phi_\pi(G))$.*

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Для любой группы G, не принадлежащей $\mathfrak{F}$, пересечение централизаторов всех дополняемых $\mathfrak{F}$-эксцентральных главных факторов группы G равно $F(G \bmod \Delta^{\mathfrak{F}}(G))$.*

§ 3. $\mathfrak{X}$-корона и главные факторы

Рассматривая связь $\mathfrak{X}$-корон с главными факторами группы G, ограничимся случаем, когда все группы из $\mathfrak{X}$ имеют одинаковую цокольную длину.

Напомним, что ряд

$$1 = S_0 < S_1 < \ldots < S_t = G$$

называется *цокольным рядом* группы G, если $S_i/S_{i-1} = \mathrm{Soc}(G/S_{i-1})$ (цоколь группы G/S_{i-1}) для любого $i = 1, \ldots, t$. Число t называется *цокольной длиной* группы и обозначается как $l_s(G)$. Цокольная длина единичной группы считается равной нулю.

Доказательство следующей леммы см. в [3, с. 35].

ЛЕММА 6. *Для любой группы G справедливы следующие утверждения*:

1) *если $l_s(G) \leqslant n$, то $l_s(G/N) \leqslant n$ для любой нормальной подгруппы N группы G*;

2) *если N_1 и N_2 — нормальные подгруппы группы G и $l_s(G/N_i) \leqslant n$, $i = 1, 2$, то $l_s(G/N_1 \cap N_2) \leqslant n$.*

Из леммы 6, в частности, следует: если n — неотрицательное целое число, то класс $\mathfrak{F}$ всех тех групп, цокольная длина которых не превосходит n, является формацией.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть n — неотрицательное целое число, $\mathfrak{X}$ — примитивный класс, такой что $l_s(H) = n$ для любой группы H из $\mathfrak{X}$. Если $\Phi_{\mathfrak{X}}(G) = 1$, то*

1) $F_{\mathfrak{X}}(G) = \mathrm{Soc}(G)$;

2) *группа G не содержит дополняемых $\mathfrak{X}$-центральных главных факторов между $F_{\mathfrak{X}}(G)$ и G*;

3) *каждая минимальная нормальная подгруппа группы G дополняема и $\mathfrak{X}$-центральна в G*;

4) *любой главный фактор группы G между 1 и $F_{\mathfrak{X}}(G)$ дополняем и $\mathfrak{X}$-централен в G*;

5) *если* $\mathrm{Soc}(G)$ *— прямое произведение* t *минимальных нормальных подгрупп группы* G, *то каждый главный ряд группы* G *содержит ровно* t *дополняемых* $\mathfrak{X}$*-центральных главных факторов*;

6) *если* K/L *— дополняемый* $\mathfrak{X}$*-центральный главный фактор группы* G, *и* M *— максимальная подгруппа группы* G, *дополняющая* K/L, *то найдётся минимальная нормальная подгруппа* N *в* G, *которая* G*-изоморфна* K/L *и дополняется в* G *подгруппой* M.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Утверждение прямо следует из теоремы 1.

2) Предположим, что найдётся дополняемый $\mathfrak{X}$-центральный главный фактор A/B группы G, такой что $F_{\mathfrak{X}}(G) \subseteq B$. По лемме 2 в группе G существуют такие нормальные подгруппы $N_1, \ldots, N_k$, что $N_1 \cap \ldots \cap N_k = 1$ и $G/N_i \in \mathfrak{X}$ для любого $i = 1, \ldots, k$. Согласно лемме 6 имеем $l_s(G) \leqslant n$. А так как $F_{\mathfrak{X}}(G) = \mathrm{Soc}(G)$, то $l_s(G/F_{\mathfrak{X}}(G)) \leqslant n - 1$. Пусть M — максимальная подгруппа группы G, дополняющая главный фактор A/B. Тогда $B \subseteq \mathrm{Core}_G(M)$, а значит, $\mathrm{Soc}(G) \subseteq \mathrm{Core}_G(M)$.

Так как главный фактор A/B $\mathfrak{X}$-централен в G, то $[A/B](G/C_G(A/B)) \in \mathfrak{X}$. По [3, лемма 3.29] $G/\mathrm{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}$, а следовательно, по условию теоремы, $l_s(G/\mathrm{Core}_G(M)) = n$. С другой стороны,

$$G/\mathrm{Core}_G(M) \cong G/F_{\mathfrak{X}}(G)/\mathrm{Core}_G(M)/F_{\mathfrak{X}}(G).$$

Тогда по лемме 6 получаем $l_s(G/\mathrm{Core}_G(M)) \leqslant n - 1$; противоречие. Значит, группа G не содержит дополняемых $\mathfrak{X}$-центральных главных факторов, расположенных выше $F_{\mathfrak{X}}(G)$.

3) Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. В силу леммы 3 имеет место $\Phi(G) = 1$, поэтому N дополняема в G. Предположим, что N $\mathfrak{X}$-эксцентральна в G. Тогда $[N](G/C_G(N) \notin \mathfrak{X}$. По [3, лемма 3.29], $G/\mathrm{Core}_G(M) \notin \mathfrak{X}$ для любой максимальной подгруппы M группы G, дополняющей подгруппу N. Следовательно, каждая максимальная подгруппа T, для которой $G/\mathrm{Core}_G(T) \in \mathfrak{X}$, содержит N. Отсюда, на основании леммы 2, $N \subseteq \Phi_{\mathfrak{X}}(G)$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, каждая минимальная нормальная подгруппа группы G дополняема в G и является $\mathfrak{X}$-центральной.

4) Пусть K/L — такой главный фактор группы G, что $K \subseteq F_{\mathfrak{X}}(G)$. Так как $F_{\mathfrak{X}}(G) = \mathrm{Soc}(G)$, найдётся минимальная нормальная подгруппа N группы G, такая что $K = N \times L$ и $F_{\mathfrak{X}}(G) = K \times D$. Согласно теореме 1 $F_{\mathfrak{X}}(G)$ дополняема в G. Пусть H — одно из дополнений подгруппы $F_{\mathfrak{X}}(G)$ в G. Тогда HLD — максимальная подгруппа группы G, дополняющая главный фактор K/L. Кроме того, по утверждению 3 подгруппа N $\mathfrak{X}$-центральна в G, а значит, на основании G-изоморфизма $N \cong K/L$ главный фактор K/L является $\mathfrak{X}$-центральным в G.

5) Пусть $\mathrm{Soc}(G) = N_1 \times \ldots \times N_t$. Рассмотрим некоторый главный ряд h группы G:

$$1 < N_1 < N_1N_2 < \ldots < N_1 \ldots N_t = F_{\mathfrak{X}}(G) < G_1 < \ldots < G_m = G.$$

По утверждению 4 каждый главный фактор ряда h на участке от 1 до $F_{\mathfrak{X}}(G)$ дополняем и $\mathfrak{X}$-централен, а на основании утверждения 2 все главные факторы ряда h, расположенные выше $F_{\mathfrak{X}}(G)$, либо фраттиниевы, либо дополняемы и $\mathfrak{X}$-эксцентральны.

Если f — произвольный главный ряд группы G, то в силу [5, теор. A.9.13] существует взаимно однозначное соответствие между главными факторами рядов h и f, такое что соответствующие главные факторы G-изоморфны и оба одновременно либо фраттиниевы, либо дополняемы. Главный ряд h содержит ровно t дополняемых $\mathfrak{X}$-центральных главных факторов, поэтому таким же свойством обладает и ряд f.

6) Пусть K/L — дополняемый $\mathfrak{X}$-центральный главный фактор группы G, M — максимальная подгруппа группы G, дополняющая K/L. Ввиду [5, предлож. A.15.5] факторы K/L и $K\mathrm{Core}_G(M)/\mathrm{Core}_G(M)$ являются G-изоморфными и $L = K \cap \mathrm{Core}_G(M)$. Так как K/L $\mathfrak{X}$-централен в G, то $G/\mathrm{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}$. В силу утверждения 2, $\mathrm{Core}_G(M)$ не содержит $F_{\mathfrak{X}}(G)$. Поскольку $F_{\mathfrak{X}}(G) = \mathrm{Soc}(G)$, существует минимальная нормальная подгруппа N в G, которая не содержится в $\mathrm{Core}_G(M)$. Группа $G/\mathrm{Core}_G(M)$ примитивна, поэтому

$$\begin{aligned} N &\cong N\mathrm{Core}_G(M)/\mathrm{Core}_G(M) = K\mathrm{Core}_G(M)/\mathrm{Core}_G(M) \\ &\cong K/K \cap \mathrm{Core}_G(M) = K/L. \end{aligned}$$

Таким образом, N G-изоморфна K/L. Ясно, что M дополняет N в G. $\square$

Отметим, что согласно лемме 2 для любого примитивного класса $\mathfrak{X}$ все дополняемые главные факторы группы G, расположенные на участке от 1 до $\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$, являются $\mathfrak{X}$-эксцентральными.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Пусть n — неотрицательное целое число, $\mathfrak{X}$ — такой примитивный класс, что $l_s(H) = n$ для любой группы H из $\mathfrak{X}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *все дополняемые главные факторы группы G, расположенные ниже $\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$ или выше $F_{\mathfrak{X}}(G)$, являются $\mathfrak{X}$-эксцентральными;*

2) *все главные факторы группы G, расположенные между подгруппами $\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$ и $F_{\mathfrak{X}}(G)$, дополняемы и $\mathfrak{X}$-центральны в G;*

3) *если t — длина G-главного ряда $\mathfrak{X}$-короны $F_{\mathfrak{X}}(G)/\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$, то каждый главный ряд группы G содержит ровно t дополняемых $\mathfrak{X}$-центральных главных факторов.*

Рассмотрим теперь один частный случай. Пусть H — примитивная группа, $\mathfrak{X} = (H)$ — примитивный класс, все группы которого изоморфны H. В этом случае класс $R_0(\mathfrak{X}, 1)$ будем обозначать через $R_0(H, 1)$, а подгруппы $\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$ и $F_{\mathfrak{X}}(G)$ — через $\Phi_H(G)$ и $F_H(G)$ соответственно. $\mathfrak{X}$-корону группы G при $\mathfrak{X} = (H)$ назовём *H-короной* и обозначим через $Cr(G, H)$. Будем говорить, что главный фактор A/B группы G *H-централен* в G, если

$$[A/B](G/C_G(A/B)) \cong H.$$

Если же $[A/B](G/C_G(A/B))$ не изоморфна H, то главный фактор A/B будем называть *H-эксцентральным.*

СЛЕДСТВИЕ 5. *Пусть H — примитивная группа. Тогда для любой группы G справедливы следующие утверждения:*

1) *все дополняемые главные факторы группы G, расположенные ниже $\Phi_H(G)$ или выше $F_H(G)$, являются H-эксцентральными;*

2) *все главные факторы группы G, расположенные между подгруппами $\Phi_H(G)$ и $F_H(G)$, дополняемы и H-центральны в G;*

3) *если* t — *длина* G-*главного ряда* H-*короны* $F_H(G)/\Phi_H(G)$, *то каждый главный ряд группы* G *содержит ровно* t *дополняемых* H-*центральных главных факторов.*

Требование равенства цокольной длины всех групп из $\mathfrak{X}$ в теореме 3 существенно, и его отбросить нельзя. На это указывает следующий

ПРИМЕР 6. Пусть $\mathfrak{X} = (H_1, H_2)$, где H_1 — группа порядка 2, H_2 — нециклическая группа порядка 6. Пусть $G = H_1 \times H_2$. Тогда $\Phi_{\mathfrak{X}}(G) = 1$, $F_{\mathfrak{X}}(G) = H_1 \times D$, где D — подгруппа из H_2, имеющая порядок 3; при этом утверждения 2, 5, 6 теоремы 3 в группе G не выполняются.

§ 4. Дополняемость $\mathfrak{X}$-короны

Как показывает теорема 1, $\mathfrak{X}$-корона $Cr(G, \mathfrak{X})$ дополняема в любой группе G для любого примитивного класса $\mathfrak{X}$. Проводя аналогию между коронами дополняемых главных факторов и $\mathfrak{X}$-коронами группы, естественно задать вопрос о сопряжённости дополнений $\mathfrak{X}$-корон. Однако уже простые примеры показывают, что ответ на него в общем случае отрицателен. В частности, в группе G из примера 6 подгруппы $\langle(1, y)\rangle$ и $\langle(x, y)\rangle$, где x и y — элементы порядка 2 соответственно из H_1 и H_2, дополняют подгруппу $F_{\mathfrak{X}}(G)$ в группе G, но, очевидно, не сопряжены в G.

Докажем: в случае если все группы из $\mathfrak{X}$ имеют одинаковую цокольную длину, любые два дополнения к $\mathfrak{X}$-короне сопряжены в G. Для доказательства этого факта нам понадобится следующая информация из [4] о частично префраттиниевых подгруппах.

Короной группы G называется любая корона дополняемого главного фактора группы G. Множество всех корон группы G будем обозначать через $Cr(G)$.

Ввиду теоремы Жордана–Гёльдера для построения множества $Cr(G)$ достаточно рассмотреть некоторый главный ряд группы G и выбрать в нем максимальную систему $H_1/K_1, \dots, H_t/K_t$ попарно не G-изоморфных дополняемых главных факторов. Тогда

$$Cr(G) = \{Cr_G(H_1/K_1), \dots, Cr_G(H_t/K_t)\}.$$

Рассмотрим подмножество

$$\mathfrak{M} = \{Cr_G(H_j/K_j) \mid j \in J\}$$

множества $Cr(G)$, $J \subseteq \{1, \ldots, t\}$. Дополняемый главный фактор группы G будем называть $\mathfrak{M}$-*фактором*, если он G-изоморфен H_j/K_j для некоторого $j \in J$. Подгруппа $\bigcap\limits_{j \in J} B_j$, где B_j — дополнение короны $Cr_G(H_j/K_j)$ в G, называется $\mathfrak{M}$-*префраттиниевой подгруппой* группы G. Если $\mathfrak{M} = \varnothing$, то полагаем, что $\mathfrak{M}$-префраттиниева подгруппа группы G совпадает с G.

ЛЕММА 7 [4]. *Для любого подмножества $\mathfrak{M}$ множества $Cr(G)$ каждая $\mathfrak{M}$-префраттиниева подгруппа группы G изолирует все дополняемые главные $\mathfrak{M}$-факторы и покрывает все остальные главные факторы группы G.*

ЛЕММА 8 [4]. *Для любого подмножества $\mathfrak{M}$ множества $Cr(G)$ любые две $\mathfrak{M}$-префраттиниевы подгруппы из G сопряжены.*

ЛЕММА 9 [4]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — непустое подмножество множества $Cr(G)$. Подгруппа B группы G является $\mathfrak{M}$-префраттиниевой подгруппой тогда и только тогда, когда она представима в виде*

$$B = M_1 \cap \ldots \cap M_r,$$

где $M_1, \ldots, M_r$ — максимальные подгруппы группы G, изолирующие различные дополняемые главные $\mathfrak{M}$-факторы некоторого главного ряда группы G, r — число всех дополняемых главных $\mathfrak{M}$-факторов этого ряда.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть n — неотрицательное целое число, $\mathfrak{X}$ — такой примитивный класс, что $l_s(H) = n$ для любой группы H из $\mathfrak{X}$. Подгруппа S группы G является дополнением короны $F_{\mathfrak{X}}(G)/\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$ тогда и только тогда, когда S является $\mathfrak{M}$-префраттиниевой подгруппой группы G, где $\mathfrak{M}$ — множество всех корон группы G, определяемых её дополняемыми $\mathfrak{X}$-центральными главными факторами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S — $\mathfrak{M}$-префраттиниева подгруппа группы G, где $\mathfrak{M}$ — множество всех корон группы G, определяемых дополняемыми $\mathfrak{X}$-центральными главными факторами группы G.

Рассмотрим главный ряд h группы G, проходящий через подгруппы $\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$ и $F_{\mathfrak{X}}(G)$. Ввиду следствия 4 все дополняемые главные факторы ряда h, расположенные ниже $\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$ или выше $F_{\mathfrak{X}}(G)$, либо фраттиниевы, либо дополняемы и $\mathfrak{X}$-эксцентральны в G, а все главные факторы ряда h, расположенные между подгруппами $\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$ и $F_{\mathfrak{X}}(G)$, дополняемы и $\mathfrak{X}$-центральны в G. Отсюда в силу леммы 7 подгруппа S покрывает все главные факторы ряда h, расположенные ниже $\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$ или выше $F_{\mathfrak{X}}(G)$, и изолирует все главные факторы ряда h, расположенные между подгруппами $\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$ и $F_{\mathfrak{X}}(G)$. Тогда $G = SF_{\mathfrak{X}}(G)$ и $S \cap F_{\mathfrak{X}}(G) = \Phi_{\mathfrak{X}}(G)$, т.е. S — дополнение короны $F_{\mathfrak{X}}(G)/\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$.

Докажем обратное утверждение. Пусть S — дополнение короны $F_{\mathfrak{X}}(G)/\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$, $\mathfrak{M}$ — множество всех корон группы G, которые соответствуют дополняемым главным факторам H/K, для которых $[H/K](G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{X}$. Ввиду теоремы 3

$$F_{\mathfrak{X}}(G)/\Phi_{\mathfrak{X}}(G) = \mathrm{Soc}(G/\Phi_{\mathfrak{X}}(G)),$$

поэтому

$$F_{\mathfrak{X}}(G)/\Phi_{\mathfrak{X}}(G) = (N_1/\Phi_{\mathfrak{X}}(G)) \times \ldots \times (N_t/\Phi_{\mathfrak{X}}(G)),$$

где $N_i/\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G/\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$.

Рассмотрим главный ряд h группы G:

$$\begin{aligned} 1 &= \Phi_0 < \Phi_1 < \ldots < \Phi_k = \Phi_{\mathfrak{X}}(G) \\ &= N_0 < N_1 < N_1N_2 < \ldots < N_1 \ldots N_t = F_{\mathfrak{X}}(G) \\ &= G_0 < G_1 < \ldots < G_m = G. \end{aligned}$$

По следствию 4 каждый главный фактор ряда h, расположенный ниже $\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$ или выше $F_{\mathfrak{X}}(G)$, либо фраттиниев, либо дополняем и $\mathfrak{X}$-эксцентрален в G, а все главные факторы ряда h, расположенные на участке от $\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$ до $F_{\mathfrak{X}}(G)$, являются дополняемыми и $\mathfrak{X}$-центральными в G. Таким образом, все дополняемые $\mathfrak{M}$-факторы ряда h расположены на участке от $\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$ до $F_{\mathfrak{X}}(G)$, и их число равно t.

Пусть $M_i = N_1 \ldots N_{i-1}N_{i+1} \ldots N_tS$, $i = 1, \ldots, t$. Очевидно, M_i — максимальная подгруппа группы G, дополняющая главный фактор $N_1 \ldots N_i/$

$/N_1 \dots N_{i-1}$. Ввиду леммы 9, $M_1 \cap \dots \cap M_t$ — $\mathfrak{M}$-префраттиниева подгруппа группы G. Остаётся заметить, что

$$M_1 \cap \dots \cap M_t = \bigcap_{i=1}^{t} (N_1 \dots N_{i-1} N_{i+1} \dots N_t S) = S. \ \square$$

В силу леммы 8 имеем

СЛЕДСТВИЕ 6. *Пусть n — неотрицательное целое число, $\mathfrak{X}$ — такой примитивный класс, что $l_s(H) = n$ для любой группы H из $\mathfrak{X}$. Тогда любые два дополнения $\mathfrak{X}$-короны $F_{\mathfrak{X}}(G)/\Phi_{\mathfrak{X}}(G)$ группы G сопряжены.*

В случае однопорождённого примитивного класса $\mathfrak{X}$ справедливо

СЛЕДСТВИЕ 7. *Пусть H — примитивная группа. Для любой группы G выполняются следующие утверждения*:

1) *подгруппа S группы G является дополнением H-короны $Cr(G, H) = F_H(G)/\Phi_H(G)$ тогда и только тогда, когда S является $\mathfrak{M}$-префраттиниевой подгруппой группы G, где $\mathfrak{M}$ — множество всех корон группы G, которые соответствуют таким дополняемым главным факторам L/K, что $[L/K](G/C_G(L/K)) \cong H$*;

2) *любые два дополнения H-короны $F_H(G)/\Phi_H(G)$ группы G сопряжены.*

§ 5. Подгруппы префраттиниева типа

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс групп, G — группа, в главном ряду которой ровно n дополняемых $\mathfrak{F}$-эксцентральных главных факторов. Следуя [3], будем говорить, что H — *$\mathfrak{F}$-префраттиниева подгруппа* группы G, если для любого главного ряда группы G найдутся максимальные подгруппы $M_1, \dots, M_n$, изолирующие различные дополняемые $\mathfrak{F}$-эксцентральные факторы этого ряда, такие что $H = M_1 \cap \dots \cap M_n$ (если в G нет дополняемых $\mathfrak{F}$-эксцентральных главных факторов, то $\mathfrak{F}$-префраттиниевой подгруппой группы G считается сама G).

Следующая лемма описывает основные свойства $\mathfrak{F}$-префраттиниевых подгрупп. Доказательство её можно найти в [2, 3, 8].

ЛЕММА 10. *Пусть H — $\mathfrak{F}$-префраттиниева подгруппа группы G. Тогда*

1) *любая $\mathfrak{F}$-префраттиниева подгруппа группы G сопряжена с H;*

2) *подгруппа H изолирует все дополняемые $\mathfrak{F}$-эксцентральные главные факторы и покрывает все остальные главные факторы группы G.*

ЛЕММА 11. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс групп, $\mathfrak{X} = \mathcal{P}(G) \cap \mathfrak{F}$. Подгруппа H является $\mathfrak{F}$-префраттиниевой подгруппой группы G тогда и только тогда, когда она является $\mathfrak{X}$-префраттиниевой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое следует из того, что дополняемый главный фактор группы G является $\mathfrak{F}$-эксцентральным тогда и только тогда, когда он $\mathfrak{X}$-эксцентрален в G. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для любой группы $G \neq 1$ найдутся такие попарно неизоморфные примитивные подгруппы $H_1, \dots, H_n$, что $\mathcal{P}(G) = (H_1, \dots, H_n)$. В дальнейшем будем использовать запись вида $\mathfrak{X} = (H_1, \dots, H_n)$ и предполагать, что группы H_i и H_j класса $\mathfrak{X}$ не изоморфны при любых $i \neq j$.

Будем говорить, что подгруппа H группы G является *подгруппой префраттиниева типа*, если она является $\mathfrak{F}$-префраттиниевой подгруппой для некоторого класса $\mathfrak{F}$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $\mathcal{P}(G) = (H_1, \dots, H_n)$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *все подгруппы префраттиниева типа группы G исчерпываются $\mathfrak{X}$-префраттиниевыми подгруппами, где $\mathfrak{X}$ пробегает все подклассы класса $\mathcal{P}(G)$;*

2) *число всех классов сопряжённых подгрупп префраттиниева типа в группе G равно 2^n.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Утверждение прямо следует из леммы 11.

2) Пусть $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ — два различных подкласса класса $\mathcal{P}(G)$ и H_i — $\mathfrak{X}_i$-префраттиниева подгруппа группы G, $i = 1, 2$. Так как $\mathfrak{X}_1 \neq \mathfrak{X}_2$, то по лемме 10 в G найдётся по крайней мере один дополняемый главный фактор, который покрывается подгруппой H_1, но изолируется подгруппой H_2. Сле-

довательно, H_1 и H_2 принадлежат различным классам сопряжённых подгрупп. Кроме того, в силу леммы 10 для любого подкласса $\mathfrak{X}$ класса $\mathcal{P}(G)$ в G существует единственный класс сопряжённых $\mathfrak{X}$-префраттиниевых подгрупп. Таким образом, множество всех классов сопряжённых подгрупп префраттиниева типа группы G равномощно множеству всех подмножеств множества $\{H_1, \ldots, H_n\}$, а значит, его мощность равна 2^n. □

ТЕОРЕМА 6. *Пусть* $\mathcal{P}(G) = (H_1, \ldots, H_n)$, $\mathfrak{X} = (H_j \mid j \in J)$, $J \subseteq \subseteq I = \{1, \ldots, n\}$. *Если* H *—* $\mathfrak{X}$*-префраттиниева подгруппа группы* G*, то*

1) *для любого* $j \in J$ *подгруппа* H *покрывает* H_j*-корону группы* G;

2) *для любого* $i \in I \setminus J$ *подгруппа* H *изолирует* H_i*-корону группы* G;

3) H *покрывает все фраттиниевы главные факторы группы* G;

4) *если* B_i *— дополнение* H_i*-короны группы* G, $i \in I \setminus J$, *то* $\bigcap\limits_{i \in I \setminus J} B_i$ *—* $\mathfrak{X}$*-префраттиниева подгруппа группы* G;

5) *в группе* G *найдётся такой элемент* x, *что* $H = \bigcap\limits_{i \in I \setminus J} B_i^x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $I = J$, то $\bigcap\limits_{i \in I \setminus J} B_i = G$ (напомним, что по нашему соглашению пересечение пустого множества подгрупп совпадает с G). Если $J = \varnothing$, то $\bigcap\limits_{i \in I \setminus J} B_i$ — префраттиниева подгруппа.

Пусть теперь $I \neq J$, $J = \{1, \ldots, k-1\} \neq \varnothing$.

1) Рассмотрим главный ряд h_i группы G, проходящий через подгруппы $\Phi_{H_i}(G)$ и $F_{H_i}(G)$, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} 1 &= \Phi_0 < \Phi_1 < \ldots < \Phi_l = \Phi_{H_i}(G) \\ &= F_0 < F_1 < \ldots < F_t = F_{H_i}(G) = G_0 < G_1 < \ldots < G_m = G. \end{aligned}$$

Если $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, то по следствию 5 все главные факторы $F_1/F_0, \ldots, F_t/F_{t-1}$ дополняемы и H_i-центральны, а значит, $\mathfrak{X}$-центральны в G. Согласно лемме 10, H покрывает все факторы $F_1/F_0, \ldots, F_t/F_{t-1}$, т. е. $F_j \leq \leq HF_{j-1}$ для всех $j = 1, \ldots, t$. Отсюда

$$F_t = F_{H_i}(G) \leq HF_0 = H\Phi_{H_i}(G),$$

т. е. подгруппа H покрывает H_i-корону $Cr(G, H_i)$ группы G.

2) Если $i \in \{k, k+1, \dots, n\}$, то ввиду следствия 5 все главные факторы $F_1/F_0, \dots, F_t/F_{t-1}$ дополняемы и H_i-центральны в G; а так как $H_i \notin \mathfrak{X}$, то они $\mathfrak{X}$-эксцентральны в G. В силу леммы 10, H изолирует все главные факторы $F_1/F_0, \dots, F_t/F_{t-1}$, т. е. $H \cap F_j \leq F_{j-1}$ для всех $j = 1, \dots, t$. Отсюда следует, что

$$H \cap F_t = H \cap F_{H_i}(G) \leq F_0 = \Phi_{H_i}(G),$$

т. е. подгруппа H изолирует корону $Cr(G, H_i)$ группы G.

3) Утверждение прямо следует из леммы 10.

4) В силу следствия 7, для любого $i = 1, 2, \dots, n$ подгруппа B_i является $\mathfrak{M}_i$-префраттиниевой подгруппой группы G, если $\mathfrak{M}_i$ — множество всех корон группы G, которые соответствуют таким дополняемым главным факторам L/K группы G, что $[L/K](G/C_G(L/K)) \cong H_i$.

По лемме 9, B_i представима в виде $B_i = M_{i1} \cap \ldots \cap M_{ir_i}$, где $M_{i1}, \dots, M_{ir_i}$ — максимальные подгруппы группы G, изолирующие различные дополняемые главные $\mathfrak{M}_i$-факторы некоторого главного ряда группы G, а r_i — это число всех дополняемых главных $\mathfrak{M}_i$-факторов этого ряда. Отсюда, в силу [3, теор. 13.4], B_i является $\mathfrak{X}_i$-префраттиниевой подгруппой группы G для класса $\mathfrak{X}_i = (H_1, \dots, H_{i-1}, H_{i+1}, \dots, H_n)$. Тогда для всякого главного ряда группы G максимальные подгруппы $M_{k1}, \dots, M_{kr_1}, \dots, M_{n1}, \dots, M_{nr_n}$ изолируют все дополняемые $\mathfrak{X}$-эксцентральные главные факторы этого ряда, а значит, подгруппа $B_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n$ является $\mathfrak{X}$-префраттиниевой подгруппой группы G.

5) Утверждение является прямым следствием леммы 10. □

§ 6. Решётка $Pr(G, \Sigma)$

Пусть $\mathcal{P}(G) = (H_1, \dots, H_n)$, B_i — дополнение к H_i-короне группы G, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда система $\Sigma = \{B_1, \dots, B_n\}$ называется *префраттиниевой системой* группы G.

Пусть теперь $\mathfrak{X} = (H_j \mid j \in J)$ — некоторый подкласс класса $\mathcal{P}(G)$, $J \subseteq \{1, \dots, n\}$. Скажем, что $\mathfrak{X}$-префраттиниева подгруппа B группы G

ассоциирована с префраттиниевой системой Σ, если она представима в виде $B = \bigcap\limits_{j \in J} B_j$, где $B_j \in \Sigma$ для всех $j \in J$.

Подгруппой префраттиниева типа группы G, *ассоциированной с префраттиниевой системой* Σ, будем называть всякую подгруппу B из G, удовлетворяющую следующим условиям:

1) B является $\mathfrak{X}$-префраттиниевой подгруппой для некоторого подкласса $\mathfrak{X}$ класса $\mathcal{P}(G)$;

2) B ассоциирована с Σ.

Множество всех подгрупп префраттиниева типа группы G, ассоциированных с префраттиниевой системой Σ, обозначим через $Pr(G, \Sigma)$. Понятно, что в случае $\mathfrak{X} = \varnothing$ $\mathfrak{X}$-префраттиниева подгруппа группы G, ассоциированная с Σ, совпадает с G, т. е. всегда $G \in Pr(G, \Sigma)$.

ЛЕММА 12. *Если* Σ *— префраттиниева система группы* G *и* B, B' *— элементы из* $Pr(G, \Sigma)$, *то*

1) $B \cap B' \in Pr(G, \Sigma)$;

2) $BB' = B'B \in Pr(G, \Sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\mathcal{P}(G) = (H_1, \dots, H_n)$, $\Sigma = \{B_1, \dots, B_n\}$. Пусть B — $\mathfrak{X}_1$-префраттиниева подгруппа, B' — $\mathfrak{X}_2$-префраттиниева подгруппа группы G. Если $\mathfrak{X}_1 = (H_{i_1}, \dots, H_{i_k})$, $\mathfrak{X}_2 = (H_{j_1}, \dots, H_{j_l})$, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2$, то по определению подгруппа

$$B \cap B' = (B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_k}) \cap (B_{j_1} \cap \ldots \cap B_{j_l})$$

является $\mathfrak{X}$-префраттиниевой подгруппой группы G, принадлежащей $Pr(G, \Sigma)$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2$. Будем считать, что $\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2 = (H_1, \dots, H_t)$. Тогда

$$BB' = (B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_k})(B_{j_1} \cap \ldots \cap B_{j_l}) \subseteq B_1 \cap \ldots \cap B_t,$$

т. е. BB' содержится в $(\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2)$-префраттиниевой подгруппе

$$C = B_1 \cap \ldots \cap B_t.$$

Сравнивая порядки подгрупп BB', C и применяя теорему 6, получаем $|BB'| = |C|$. Отсюда и из $BB' \subseteq C$ следует, что $BB' = C$. $\square$

ТЕОРЕМА 7. *Для каждой группы G и любой её префраттиниевой системы Σ справедливы следующие утверждения:*

1) $Pr(G, \Sigma)$ — подрешётка решётки всех подгрупп группы G; нулём этой решётки является префраттиниева подгруппа, ассоциированная с Σ, а единицей — сама группа G;

2) если $\mathcal{P}(G) = (H_1, \ldots, H_n)$, то решётка $Pr(G, \Sigma)$ изоморфна решётке $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ всех подмножеств n-элементного множества X.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Sigma = \{B_1, \ldots, B_n\}$. Из леммы 12 следует, что $Pr(G, \Sigma)$ — подрешётка решётки всех подгрупп группы G. Для любой подгруппы B префраттиниева типа группы G, ассоциированной с Σ, справедливо включение $B_1 \cap \ldots \cap B_n \subseteq B \subseteq G$, поэтому префраттиниева подгруппа $B_1 \cap \ldots \cap B_n$ — нуль решётки $Pr(G, \Sigma)$, а G — её единица.

Пусть $X = \{1, \ldots, n\}$. Рассмотрим отображение f, ставящее в соответствие каждому подмножеству $\{i_1, \ldots, i_k\}$ множества X $\mathfrak{X}$-префраттиниеву подгруппу из $Pr(G, \Sigma)$, где $\mathfrak{X} = \mathcal{P}(G) \setminus (H_{i_1}, \ldots, H_{i_k})$. Проверка показывает, что f и является искомым изоморфизмом решётки $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ на $Pr(G, \Sigma)$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 8. *Для каждой группы G и любой её префраттиниевой системы $\Sigma = \{B_1, \ldots, B_n\}$ решётка $Pr(G, \Sigma)$ является атомной и коатомной. Коатомами решётки $Pr(G, \Sigma)$ являются подгруппы $B_1, \ldots, B_n$, а атомами — подгруппы $S_i = B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1} \cap B_{i+1} \cap \ldots \cap B_n$ для всех $i = 1, \ldots, n$.*

СЛЕДСТВИЕ 9. *Для каждой группы G и любой её префраттиниевой системы $\Sigma = \{B_1, \ldots, B_n\}$ решётка $Pr(G, \Sigma)$ является булевой. Дополнением $\mathfrak{X}$-префраттиниевой подгруппы $B \in Pr(G, \Sigma)$ в решётке $Pr(G, \Sigma)$ является $(\mathcal{P}(G) \setminus \mathfrak{X})$-префраттиниева подгруппа B', ассоциированная с системой Σ.*

СЛЕДСТВИЕ 10. *Пусть $\mathcal{P}(G) = (H_1, \ldots, H_n)$, $S_1, \ldots, S_n$ — атомы решётки $Pr(G, \Sigma)$, P — префраттиниева подгруппа группы G, ассоции-*

рованная с системой Σ. *Тогда*

1) *подгруппа* S_i *покрывает все фраттиниевы главные факторы группы* G *и её* H_i*-корону* $Cr_{H_i}(G)$, *а так же для любого* $j \neq i$ *изолирует* H_j*-корону* $Cr_{H_j}(G)$ *группы* G;

2) $|S_i| = |P| \cdot |Cr_{H_i}(G)|$;

3) *для любых различных* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *справедливы равенства* $S_iS_j = S_jS_i$ *и* $S_i \cap S_j = P$;

4) *если* B — $(H_{i_1}, \ldots, H_{i_k})$*-префраттиниева подгруппа группы* G, *ассоциированная с префраттиниевой системой* Σ, *то* $B = S_{i_1} \ldots S_{i_k}$;

5) $G = S_1 \ldots S_n$, $S_1 \cap \ldots \cap S_n = P$, $|G| = |P| \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} |Cr_{H_i}(G)|$.

СЛЕДСТВИЕ 11. *Пусть* $\Sigma = \{B_1, \ldots, B_n\}$ — *префраттиниева система группы* G, $\{S_1, \ldots, S_n\}$ — *множество всех атомов решётки* $Pr(G, \Sigma)$. *Тогда для любых непустого подкласса* $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{P}(G)$ *и* $\mathfrak{X}$*-префраттиниевой подгруппы* H *группы* G *найдутся атомы* $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k} \in \in Pr(G, \Sigma)$ *и элемент* $x \in G$, *такие что* $H = S_{i_1}^x \ldots S_{i_k}^x$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ввиду леммы 11 и теоремы 5, для любого класса групп $\mathfrak{F}$ каждая $\mathfrak{F}$-префраттиниева подгруппа H группы G является $\mathfrak{X}$-префраттиниевой подгруппой для некоторого подкласса $\mathfrak{X}$ из $\mathcal{P}(G)$. В силу теоремы 6 подгруппа H совпадает с пересечением элементов некоторой префраттиниевой системы $\Sigma = \{B_1, \ldots, B_n\}$. По следствию 11 подгруппа H (за исключением случая $\mathfrak{X} = \varnothing$) совпадает с произведением некоторых атомов $S_1, \ldots, S_n$ решётки $Pr(G, \Sigma)$. Таким образом, системы $\{B_1, \ldots, B_n\}$, $\{S_1, \ldots, S_n\}$ и сопряжённые с ними являются базисами для построения всех подгрупп префраттиниева типа в группе G.

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. Gaschütz*, Praefrattinigruppen, Arch. Math., **13**, No. 3 (1962), 418—426.
2. *T. Hawkes*, Analogues of prefrattini subgroups, Proc. int. conf. Theory of groups (Australian Nat. Univ., Canberra, 1965), New York–London–Paris, Gordon and Breach, 1967, 145—150.

3. *Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба*, Формации алгебраических систем, М., Наука, 1989.
4. *С. Ф. Каморников*, О префраттиниевых подгруппах конечных разрешимых групп, Сиб. матем. ж., **49**, № 6 (2008), 1310—1318.
5. *K. Doerk, T. Hawkes*, Finite soluble groups (De Gruyter Expo. Math., **4**), Berlin etc., W. de Gruyter, 1992.
6. *Л. А. Шеметков*, Формации конечных групп, М., Наука, 1978.
7. *С. Ф. Каморников, М. В. Селькин*, Подгрупповые функторы и классы конечных групп, Минск, Беларус. навука, 2003.
8. *A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro*, Classes of finite groups (Math. Appl. (Springer), **584**), Dordrecht, Springer-Verlag, 2006.

Поступило 6 августа 2009 г.

Адреса авторов:

КАМОРНИКОВ Сергей Фёдорович, Гомельский ф-л Межд. ин-та труд. соц. отн., пр. Октября, 46а, г. Гомель, 246029, БЕЛАРУСЬ.

e-mail: sfkamornikov@mail.ru

ШЕМЕТКОВ Леонид Александрович, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины, ул. Советская, 104, г. Гомель, 246019, БЕЛАРУСЬ.

e-mail: shemetkov@gsu.by