Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 2

УДК 533.6.013.42 *ГИДРОМЕХАНИКА*

Член-корреспондент АН СССР Э. И. ГРИГОЛЮК, А. Г. ГОРШКОВ

УДАР КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ О ВОДУ

Исследуется начальный этап взаимодействия тонкой пологой конической оболочки с идеальной несжимаемой жидкостью при вертикальном ударе о ее поверхность при условии, что начальная скорость удара v_0 намного меньше скорости звука c в среде. Оболочка своим основанием крепится к жесткому телу массой M_0 (масса тела M_0 намного больше массы оболочки m_2).

Гидродинамическое давление, действующее на оболочку, определяется приближенно на основании метода, развитого Вагнером для клина (1), и который использовался в аналогичной задаче об ударе упругой сферической оболочки (2).

В дальнейшем ограничимся изучением только осесимметричных колебаний оболочки. Для описания осесимметричного поведения пологой упругой конической оболочки под действием внешнего давления воспользуемся уравнениями теории тонких пологих оболочек конечного прогиба, представленных в форме (3)

$$\alpha W''' + W'' - W'/\alpha + \psi(W' + \operatorname{tg}\beta/k) +$$

$$+ \frac{12(1-\nu^2)}{\gamma k^2}\int\limits_0^\alpha \left(\ddot{W} - \frac{1}{\lambda k^2}p^* - \frac{1}{k}\dot{V}\right)\alpha\, d\alpha = 0; \qquad (1)$$

$$\alpha\psi'' + \psi' - \psi/\alpha - 12(1-\nu^2)\left[\operatorname{tg}\beta W'/k + (W')^2/2\right] = 0. \qquad (2)$$

Здесь $W = w/h$, $k = h/R$, $\alpha = r/R$, $V = v/c$, $\gamma = E/\rho_0 c^2$, $p^* = p/\rho c^2$, $\tau = ct/R$, $\lambda = \rho_0/\rho$, где w — перемещение точки срединной поверхности оболочки в осевом направлении; r — радиус точки срединной поверхности; R — радиус основания оболочки; h и ρ_0 — толщина и плотность материала оболочки; E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки; v — скорость движения всей системы как твердого тела; p — гидродинамическое давление; t — время; β — угол полураствора оболочки; ψ — силовая функция; ρ — плотность жидкости.

Уравнения (1) и (2) получены в предположении, что инерционными силами и внешними нагрузками в радиальном направлении можно пренебречь. Уравнение (1) есть уравнение равновесия, а (2) — уравнение неразрывности.

Для решения задачи по методу Бубнова зададимся аппроксимирующей функцией для прогиба в виде (3)

$$W = W_0(1-\alpha^2)(1-n\alpha^2), \quad n = [\zeta(1+\nu)-1]/[\zeta(5+\nu)-1]. \qquad (3)$$

Выражение (3) удовлетворяет всем граничным условиям, причем наружный край оболочки считается не смещающимся в осевом направлении и упруго защемленным таким образом, что угол поворота пропорционален изгибающему меридиональному моменту на крае (ζ — коэффициент пропорциональности).

Для жестко защемленного края $n = 1$ ($\zeta = 0$), а для жестко опертого края $n = 0{,}24528$ ($\zeta = \infty$, $\nu = 0{,}3$).

По аналогии с ударом упругой сферической оболочки (2) выражение для давления, действующего на поверхность упругой конической оболочки при небольших глубинах погружения, можно записать в виде

$$p^* = p_1^* - p_2^*; \tag{4}$$

$$p_1^* = \frac{2}{\pi}\left[\frac{V^2}{u\mu} + \xi\mu\dot{V}\right],$$

$$p_2^* = \frac{k}{2\xi}\left[\frac{V}{\xi u}\sum f_i\left[P_{2i+1}(\mu) + \frac{1-\mu^2}{\mu}P'_{2i+1}(\mu)\right]\int_0^{\xi}\alpha\dot{W}P_{2i+1}(\mu)\,d\alpha + \right.$$

$$\left. + \sum f_i P_{2i+1}(\mu)\int_0^{\xi}\alpha\ddot{W}P_{2i+1}(\mu)\,d\alpha\right]. \tag{5}$$

При этом

$$u = V \Big/ \frac{d\xi}{d\tau}, \quad \mu = \sqrt{\xi^2 - \alpha^2}/\xi, \quad \xi = \frac{b}{R}, \quad f_i = \frac{4i+3}{\pi}\left[i!^2\, 2^{2i+1}/(2i+1)!\right]^2, \tag{6}$$

где $b(\tau)$ — радиус смоченной поверхности тела (эквивалентного диска), u — функция, аналогичная функции Вагнера для жестких тел, $P_{2i+1}(\mu)$ — полиномы Лежандра.

Выражение для p_1^* соответствует давлению на жестком диске (оболочке), движущемся поступательно со скоростью V, а выражение для p_2^* обусловлено наличием дополнительного поля скоростей за счет упругих деформаций оболочки. При таком подходе наибольшие трудности возникают при определении радиуса смоченной поверхности оболочки $\xi(\tau)$. Для упрощения этой задачи можно поступить так же, как и в работе [2], т. е. рассмотреть вертикальное погружение эквивалентной механической системы, состоящей из двух жестких тел, связанных между собой упругой пружиной (или системой пружин и демпферов). Тогда из решения уравнений движения эквивалентной системы (например, методом Рунге — Кутта) определяется закон изменения функций ξ, V, $\dot{V}$ и $u = u_1 V / \dot{x}$, которые необходимы для решения уравнений движения оболочки ($u_1 = \pi \operatorname{tg}\beta / 4$ — функция Вагнера, $\dot{x}$ — скорость движения жесткой конической оболочки).

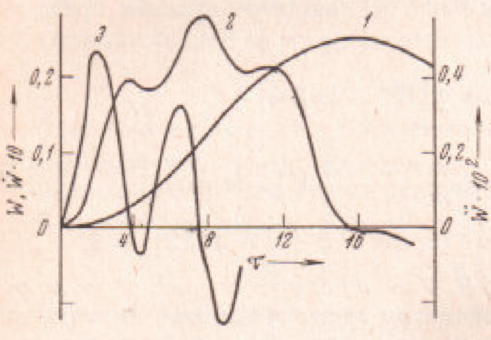

Рис. 1. Изменение прогиба W (1), скорости $\dot{W}$ (2) и ускорения $\ddot{W}$ (3) в вершине оболочки

В нашем случае выбранная аппроксимирующая функция (3) для прогиба при переменной скорости погружения не совсем точно отражает характер деформирования срединной поверхности оболочки, поэтому ограничимся изучением движения системы с постоянной скоростью $V = V_0 = \text{const}$ и $u = u_1$.

Далее определяем функцию ψ из (2) и интегрируем уравнение равновесия (1) по методу Бубнова при найденных значениях ψ и p^* (ортогонализацию следует проводить к первой производной от прогиба). В результате будем иметь

$$\ddot{W}_0 + \psi_1 k^2\gamma W_0^3 - \psi_2 k\gamma \operatorname{tg}\beta W_0^2 + \left(\psi_3 + \psi_4\frac{k^2}{12(1-\nu^2)\operatorname{tg}^2\beta}\right)\gamma \operatorname{tg}^2\beta W_0 +$$

$$+ \frac{\bar{p}}{\theta_0 k^2\lambda} = 0; \tag{7}$$

$$\bar{p} = \bar{p}_1 - \bar{p}_2, \quad \bar{p}_1 = \frac{2}{\pi}\frac{V^2}{u}Q_1,$$

$$\bar{p}_2 = \frac{k}{2\xi^2}\sum_{i=1}^{3} f_i I_i \left[\frac{V}{u} Q_i \dot{W}_0 + \xi T_i \ddot{W}_0\right]; \tag{8}$$

$$\theta_8 = \frac{8 - 25m + 20m^2}{120(2m-1)}, \quad m = \frac{n+1}{2n}.$$

Здесь

$$Q_1 = \xi^2\left(\frac{1-2m}{4} - \frac{2}{15}\xi^4 + \frac{m\xi^2}{3}\right), \quad T_1 = \frac{\xi^2}{3}\left(\frac{1-2m}{4} - \frac{2}{35}\xi^4 + \frac{m\xi^2}{5}\right),$$

$$I_1 = \xi^2\left(\frac{2m-1}{3} - \frac{4m}{15}\xi^2 + \frac{8}{105}\xi^4\right), \quad Q_2 = -\frac{m\xi^4}{7} + \frac{4}{45}\xi^6, \quad Q_3 = \frac{2}{99}\xi^6,$$

$$T_2 = -\frac{m\xi^4}{35} + \frac{4}{315}\xi^6, \quad T_3 = -\frac{2}{693}\xi^6, \quad I_2 = -4T_2, \quad I_3 = -4T_3.$$

Выражения для коэффициентов ψ_j $(j = 1-4)$ приводятся в ([3]).

Уравнение (7) решалось на ЭВМ методом Рунге — Кутта при нулевых начальных условиях. Численные расчеты проводились для стальной оболочки, ударяющейся о воду: $k = 0{,}011$; $\beta = 10°$; $\gamma = 11{,}74$; $V_0 = 6{,}66 \cdot 10^{-3}$; $n = 1$; $\eta = 0$ (η — коэффициент, характеризующий упругое смещение края в радиальном направлении).

На рис. 1 показано изменение прогиба W, скорости $\dot{W}$ и ускорения $\ddot{W}$ в вершине оболочки.

Научно-исследовательский институт механики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Wagner, Zs. angew. Math. u. Mech., 12, № 4, 199 (1932). [2] А. Г. Горшков, Э. И. Григолюк, Изв. АН СССР, Мех. жидкости и газа, № 6, 90 (1970). [3] Э. И. Григолюк, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностр., № 3, 51 (1955).