Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 4

УДК 517.9:551.465 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

М. А. БУБНОВ, А. В. КАЖИХОВ

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОКЕАНИЧЕСКОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 11 I 1971)

Рассматриваемая нами задача была сформулирована в работе ([1]). В ([2]) был предложен метод построения решения, основанный на разложении искомых функций по специально выбранному базису и сведении трехмерной задачи к более простым двумерным задачам для определения коэффициентов разложений. В данной работе устанавливается сходимость этих разложений и доказывается применимость метода итераций для нахождения коэффициентов.

1. Рассмотрим область течения Ω_0 в форме цилиндра глубины $h=1$. Начало декартовой системы координат (x, y, z) поместим на верхнем основании Ω_0, ось z направим вниз. В области $Q_T = \Omega_0 \times [0, T]$ будем искать решение системы дифференциальных уравнений линейной теории океанической циркуляции ([1])

$$u_t - lv = -\frac{1}{\bar\rho} P_x, \quad v_t + lu = -\frac{1}{\bar\rho} P_y, \quad \rho = P_z,$$
$$u_x + u_y + w_z = 0, \quad \rho_t + \Gamma w = 0 \tag{1}$$

при граничных и начальных условиях:

$$P_t + \bar\rho w = 0 \text{ при } z=0, \quad w = 0 \text{ при } z = 1; \tag{2}$$

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) = 0 \text{ на } S_0; \tag{3}$$

$$u = u^0(x, y, z), \quad v = v^0(x, y, z), \quad P = P^0(x, y, z) \text{ при } t = 0. \tag{4}$$

Здесь $l = l(x, y)$, $\bar\rho = \bar\rho(z) > 0$ и $\Gamma = \Gamma(z) > 0$ — заданные функции. S_0 — береговая граница области Ω_0, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к S_0, $\mathbf{u} = (u, v, w)$, а все остальные обозначения соответствуют работам ([1, 2]).

Условимся через Ω и S обозначать сечение области Ω_0 плоскостью $z = \text{const}$ и его границу.

Определение. Обобщенным решением задачи (1) — (4) назовем совокупность функций $\mathbf{u}$, ρ и P, обладающих производными класса $L_2(Q_T)$, входящими в систему (1), и удовлетворяющих уравнениям (1) и условиям (2) — (4) почти всюду.

Следуя идее работы ([2]), решение будем строить в виде рядов Фурье:

$$\begin{pmatrix} \bar\rho u \\ \bar\rho v \\ P \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} u_k(x, y, t) \\ v_k(x, y, t) \\ P_k(x, y, t) \end{pmatrix} \psi_k(z), \qquad \begin{pmatrix} \Gamma w \\ \rho \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} w_k(x, y, t) \\ \rho_k(x, y, t) \end{pmatrix} \frac{d\psi_k}{dz}, \tag{5}$$

где $\{\psi_k(z)\}$ — ортонормированный с весом $1/\bar\rho(z)$ базис в $L_2(0, 1)$ из собственных функций спектральной задачи

$$\bar\rho \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\Gamma}\frac{d\psi}{dz}\right) + \lambda\psi = 0, \quad 0 < z < 1; \quad \left(\frac{1}{\Gamma}\frac{d\psi}{dz} - \frac{1}{\bar\rho}\psi\right)\Bigg|_{z=0} = \frac{d\psi}{dz}\Bigg|_{z=1} = 0. \tag{6}$$

Такой выбор функций $\{\psi_k(z)\}$ и разложений (5) обеспечивает выполнение краевых условий (2); при этом для коэффициентов Фурье получается набор задач

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - l v_k = -\frac{\partial P_k}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_k}{\partial t} + l u_k = -\frac{\partial P_k}{\partial y}, \quad \lambda_k \frac{\partial P_k}{\partial t} + \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} = 0, \tag{7}$$

$$\rho_k = P_k, \quad w_k = -\frac{\partial P_k}{\partial t} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

с граничными и начальными условиями

$$(\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n})|_S = (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_k^0, \quad P_k - P_k^0)|_{t=0} = 0, \tag{8}$$

где $\mathbf{u}_k = (u_k v_k)$, а $\mathbf{u}_k^0$, P_k^0 — коэффициенты разложений начальных данных (4) по функциям $\psi_k(z)$.

Пусть $\Gamma(z) \in C^m\ [0, 1]$, $m \geqslant 1$. Определим пространство $V_2{}^m(\Omega_0)$ как замыкание в норме $W_2{}^m(\Omega_0)$ множества функций из $C^m(\Omega_0)$, ряды Фурье по системе $\{\psi_k(z)\}$ которых дифференцируемы почленно до порядка m.

Теорема 1. *Пусть начальные данные* (4) *удовлетворяют условиям*

$$\{u^0, v^0, P^0\} \in V_2^{m+1}(\Omega_0), \tag{9}$$

функция $l(x, y)$ имеет ограниченные производные порядка m, а граница $S \in C^{m+1}$.

Тогда существует единственное решение задачи (1) — (4). *Это решение обладает свойствами*

$$\{u, v, P, \rho\} \in W_2^m(Q_T), \quad w_z \in V_2^{m-1}(Q_T) \tag{10}$$

и может быть представлено в виде сходящихся рядов (5). *При $m = 4$ решение является классическим* ([7]).

Доказательство теоремы проведем для случая $m = 1$. Сначала докажем, что коэффициенты разложений однозначно определяются как решения задач (7), (8).

Лемма. *В условиях теоремы 1 для каждого номера $k = 1, 2, \ldots$ существует единственное решение задачи* (7), (8) *в классе функций $W_2{}^1(R_T)$, $R_T = \Omega \times [0, T]$, и для него справедливы неравенства*

$$\begin{gathered}(\|\mathbf{u}_k\|^2 + \lambda_k \|P_k\|^2) \leqslant M(\|\mathbf{u}_k^0\|^2 + \lambda_k \|P_k^0\|^2),\\ \left(\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t}\right\|^2 + \lambda_k \left\|\frac{\partial P_k}{\partial t}\right\|^2\right) \leqslant M(\|\mathbf{u}_k^0\|^2 + \|\nabla P_k^0\|^2 + \lambda_k^{-1} \|\nabla \mathbf{u}_k^0\|^2),\\ \|\nabla \mathbf{u}_k\|^2 \leqslant M[\lambda_k^2 \|P_k^0\|^2 + \lambda_k(\|\mathbf{u}_k^0\|^2 + \|\nabla P_k^0\|^2) + \|\nabla \mathbf{u}_k^0\|^2],\end{gathered} \tag{11}$$

где $\|\cdot\|$ есть норма в $L_2(\Omega)$, постоянная $M < \infty$ зависит лишь от области Ω и от величин T и $\gamma = \max\limits_{\Omega} \{|l| + |\nabla l|\}$, но не зависит от λ_k и номера k.

Для $l = \mathrm{const}$ однозначная разрешимость задачи (7), (8) установлена в ([3]). В случае $l \not\equiv \mathrm{const}$ рассмотрим итерационный процесс:

$$\begin{gathered}(\mathbf{u}_k^{(0)}, P_k^{(0)}) \equiv (\mathbf{u}_k^0, P_k^0),\\ \frac{\partial u_k^{(n)}}{\partial t} - v_k^{(n)} + \frac{\partial P_k^{(n)}}{\partial x} = (l - 1) v_k^{(n-1)}, \quad \frac{\partial v_k^{(n)}}{\partial t} + u_k^{(n)} + \frac{\partial P_k^{(n)}}{\partial y} = (1 - l) u_k^{(n-1)},\\ \lambda_k \frac{\partial P_k^{(n)}}{\partial t} + \frac{\partial u_k^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial v_k^{(n)}}{\partial y} = 0,\\ (\mathbf{u}_k^{(n)} \cdot \mathbf{n})|_S = (\mathbf{u}_k^{(n)} - \mathbf{u}_k^0, P_k^{(n)} - P_k^0)|_{t=0} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,\end{gathered} \tag{12}$$

и покажем его сходимость при $n \to \infty$.

Равномерная по n ограниченность и сходимость в норме $L_2(\Omega)$ приближений $\mathbf{u}_k^{(n)}$, $P_k^{(n)}$ и их производных по t следует из энергетических оценок, получаемых обычным приемом. Далее, дифференцируя перекрестно первые два уравнения (12), получаем эллиптическую систему двух уравнений для $\mathbf{u}_k^{(n)}$ с краевым условием типа Гильберта. Из представления решения этой задачи ([4]) выводится равномерная по n оценка, а затем и сходимость производных $\mathbf{u}_k^{(n)}$ по x и y в $L_2(\Omega)$.

Для предельных функций полученные оценки принимают вид (11).

Переходя к доказательству теоремы 1, заметим, что из оценок (11) следует сходимость в $L_2(Q_T)$ рядов (5) вместе с указанными в теореме производными. Действительно, для рядов, составленных из правых частей неравенств (11), на основании теорем вложения ([5]) и свойств собственных функций $\psi_k(z)$ (см., например, ([6]), §§ 22, 23) имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \|f_k\|^2 \leqslant \int\limits_{\Omega_0} \frac{1}{\Gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 d\Omega_0 + \frac{1}{\bar{\rho}(0)} \int\limits_{\Omega} f^2(x, y, 0)\, d\Omega < \infty,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \|f_k\|^2 = \left\| \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right\|^2_{L_2(\Omega_0)} < \infty, \tag{13}$$

где f — любая из функций $\bar{\rho}u^0$, $\bar{\rho}v^0$ и P^0. Отсюда следует сходимость рядов (5) вместе с производными $\mathbf{u}$, P и ρ по t, x и y. В силу неравенств $\left\| \dfrac{d\psi_k}{dz} \right\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant \max\limits_z (\Gamma/\bar{\rho}) \cdot \lambda_k$, (11) и (13) сходятся в $L_2(\Omega_0)$ также ряды (5), продифференцированные по z.

Для доказательства единственности решения заметим, что справедлив закон сохранения

$$\langle u, v, \rho, P \rangle = \langle u^0, v^0, \rho^0, P^0 \rangle = k_0^2, \tag{14}$$

где $\langle u, v, \rho, P \rangle = \int\limits_{\Omega_0} \left[\bar{\rho}(u^2 + v^2) + \frac{\rho^2}{\Gamma} \right] d\Omega_0 + \frac{1}{\bar{\rho}(0)} \int\limits_{\Omega} P^2(x, y, 0, t)\, d\Omega$, из которого с помощью дифференциального неравенства

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\int\limits_{\Omega} P^2 d\Omega \right) \leqslant \int\limits_{\Omega} (P^2 + \rho^2)\, d\Omega$$

выводится оценка

$$\|P\|^2_{L_2(\Omega_0)} \leqslant \nu k_0^2, \quad \nu = 2 \max \{1, \bar{\rho}(0), \max_z \Gamma(z)\}. \tag{15}$$

В силу линейности задачи (1) — (4) из соотношений (14) — (15) следует единственность ее решения.

З а м е ч а н и е. В более общем случае, когда в первых двух уравнениях системы (1) имеются правые части (непотенциальные внешние силы) и учитывается действие сил трения, пропорциональных скорости, теорема 1 справедлива при правых частях из $W_2^{m+1}(Q_T)$, а на коэффициент пропорциональности $r(x, y)$ накладываются такие же условия, как на l.

2. Во многих задачах океанологии, например, в теории приливных течений ([8]), необходимо учитывать турбулентный массообмен в вертикальном направлении. Первое, второе и последнее уравнения системы (1) в этом случае имеют вид

$$u_t - lv = -\frac{1}{\bar{\rho}} P_x + u_{zz}, \quad v_t + lu = -\frac{1}{\bar{\rho}} P_y + v_{zz}, \quad \rho_t + \Gamma w = \rho_{zz}. \tag{16}$$

Описанный способ выделения переменной z и сведения задачи к двумерной может быть применен в некоторых случаях и к данной системе. Например, при постоянных $\bar{\rho}$ и Γ этим методом могут быть решены следующие две краевые задачи:

$$u = v = \rho_z = w_z = 0 \text{ при } z = 0, \quad u_z = v_z = \rho = w = 0 \text{ при } z = 1; \tag{17}$$

$$u_z = v_z = \rho = w = 0 \text{ при } z = 0,\ 1. \tag{18}$$

На боковой границе S_0 и при $t = 0$ задаются прежние условия (3), (4). Для задач (16) — (18) справедлива

Теорема 2. *Если начальные данные* (4) *удовлетворяют условиям*

$$\left\{u^0, v^0, P^0, \frac{\partial^\alpha u^0}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial^\alpha v^0}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial^{\alpha+1} P_0}{\partial z^{\alpha+1}}\right\} \in V_2^{m+1}(\Omega), \quad \alpha = 1, 2, \tag{19}$$

а граница S и функция l обладают такой же гладкостью, как в теореме 1, *то решение задач* (16) — (18) *существует, единственно и может быть найдено в виде* (5), *при этом*

$$\left\{u, v, P, \rho, \frac{\partial^\alpha u}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial^\alpha v}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial^\alpha \rho}{\partial z^\alpha}\right\} \in W_2^m(Q_T), \quad \alpha = 1, 2. \tag{20}$$

Авторы выражают благодарность Г. И. Марчуку и В. Н. Монахову за внимание и полезные замечания при написании работы.

Новосибирский государственный университет

Поступило 21 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. И. Марчук, ДАН, 173, № 6, 1317 (1967). [2] Г. И. Марчук, ДАН, 185, № 5, 1041 (1969). [3] В. Н. Масленникова, Изв. АН СССР, сер. матем., 22, № 2, 271 (1958). [4] И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. [5] С. М. Никольский, УМН, 16, № 5, 63 (1961). [6] И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, М., 1961. [7] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск, 1962. [8] А. И. Фельзенбаум, Динамика морских течений, итоги науки, Гидромеханика, 1968, М., 1970. [9] Г. В. Демидов, Сибирск. матем. журн., 6, № 5, 985 (1965).