Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 4

ПЕТРОГРАФИЯ

А. Б. ВИСТЕЛИУС, А. В. ФААС

О ВЕРОЯТНОСТНЫХ СВОЙСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЗЕРЕН КВАРЦА, КАЛИЕВОГО ПОЛЕВОГО ШПАТА И ПЛАГИОКЛАЗА В МАГМАТИЧЕСКИХ ГРАНИТАХ

(Представлено академиком Д. С. Коржинским 30 IV 1970)

Систематическое изучение гранитов из различных районов мира, проводимое с 1965 г., позволило уточнить модель, предложенную в ([1]). Однородный вариант старой модели оказывается частным случаем новой.

Предполагается ([3]), что кристаллизация кварца (Q), калиевого полевого шпата (Or) и кислого плагиоклаза (Ab) осуществляется как кристаллизация трехкомпонентной системы с тройной эвтектикой внутри диаграммы и двойными эвтектиками на ее сторонах. Рассматриваются множества всех фигуративных точек, относящихся к одному и тому же пути кристаллизации.

Для каждого из указанных множеств вводится своя вероятностная мера. Обозначения: α — последовательность зерен, α_{Rr} — зерно определенного минерала R, возникшего на стадии кристаллизации r, т. е. $R \in \{Q, Or, Ab\}$ и $r \in \{1, 2, 3\}$, где 1 — появление минерала в доэвтектической стадии кристаллизации, 2 — на линии двойной эвтектики, 3 — в точке тройной эвтектики. Задание R определяет значения r. Таким образом, запись последовательности зерен α на прямой приобретает вид

$$\ldots, \alpha_{Ii}^{(k-1)}, \alpha_{Jj}^{(k)}, \ldots \tag{1}$$

Для того чтобы отметить положение зерен в последовательности (1), использован верхний индекс, помещаемый в скобках. Мы будем полагать, что случайные события $\alpha_{Ii}^{(k)}$ и $\alpha_{Jj}^{(k)}$ несовместимы, если имеет место хотя бы одно из неравенств $I \neq J$ и $i \neq j$.

Как и в предшествующем варианте ([1]), вводится принцип антагонизма. Это условие в ([1]) было излишне жестким, сейчас мы принимаем, что принцип антагонизма приводит к тому, что контакт между двумя зернами одного минерала на одной стадии кристаллизации встречается редко (т. е. имеет малую вероятность).

Как ранее ([1]), предполагается, что локальные изменения концентрации гранитного расплава вокруг кристаллизующегося зерна ограничены малой окрестностью этого зерна, влияют на условия образования не более чем одного индивида рядом с растущим зерном и не зависят от стадии кристаллизации, на которой выделяется данное зерно.

Второе видоизменение модели заключается в том, что учтена специфичность возникновения (1). Принято во внимание, что отсчеты произведены по пространственному, а не временно́му параметру, таким образом, соотношения между соседними зернами оказываются симметричными. Иными словами, если в расплаве возникло, например, зерно кварца, то имеются равные вероятности для возникновения рядом с ним зерна плагиоклаза как справа, так и слева, не зависящие от генерации, к которой принадлежит зерно кварца. Таким образом, образующиеся зерна не обладают избирательным притяжением других зерен в различных направлениях. Процесс предполагается однородным для участка, отвечающего одному большому шлифу.

Изложенным представлениям для фиксированного пути кристаллизации соответствует следующая модель механизма формирования (1):

$$P\left(\bigcup_i \alpha_{\mathrm{I}i}/\alpha_{\mathrm{R}r}\right) = c_{\mathrm{RI}} P\left(\bigcup_i \alpha_{\mathrm{I}i}\right), \quad c_{\mathrm{RI}} = c_{\mathrm{IR}} > 0; \quad 0 \leqslant c_{\mathrm{II}} < 1; \tag{2}$$

$$P\left(\alpha_{\mathrm{I}i}^{(k)}/\alpha_{\mathrm{J}j}^{(k-1)}, \alpha_{\mathrm{L}l}^{(k-2)}, \ldots, \alpha_{\mathrm{S}s}^{(k-r)}\right) = P\left(\alpha_{\mathrm{I}i}/\alpha_{\mathrm{J}j}\right) \tag{3}$$

при любых конечных k, r и любом наборе $\{\mathrm{I}i, \mathrm{J}j, \mathrm{L}l, \ldots, \mathrm{S}s\}$, возможном для данного пути кристаллизации, т. е. предполагается, что процесс протекает однородно и что влияние антагонизма при кристаллизации распространяется только на окрестность зерна и, таким образом, последовательность (1) обладает марковским свойством (3) *. Под микроскопом мы не можем опознать стадии кристаллизации, но различаем минеральный состав зерен, следовательно, последовательность (1) преобразуется в последовательность

$$\ldots, a_{\mathrm{I}}^{(k-1)}, a_{\mathrm{J}}^{(k)}, \ldots, \tag{4}$$

где $a_{\mathrm{I}} = \bigcup_i \alpha_{\mathrm{I}i}$.

Свойства последовательности (4) описываются следующими теоремами.

Теорема 1. *В условиях принятой модели для* (4) *имеет место*

$$P\left(a_{\mathrm{I}}^{(k)}/a_{\mathrm{J}}^{(k-1)}, \ldots, a_{\mathrm{R}}^{(k-l)}\right) = P\left(a_{\mathrm{I}}/a_{\mathrm{J}}\right) \tag{5}$$

при любых конечных k, l *и любом наборе* $\{\mathrm{I}, \mathrm{J}, \ldots, \mathrm{R}\}$.

Лемма. *Для выполнения* (5) *при наличии марковского свойства* (3) *достаточно каждого из условий:*

а) *после разбиения матрицы переходных вероятностей* $\mathbf{P}\left(\alpha_{\mathrm{I}i}^{(k)}/\alpha_{\mathrm{J}j}^{(k-1)}\right)$ *на клетки согласно объединению состояний сумма по каждой строке внутри клетки является постоянной для данной клетки;*

б) *условие, аналогичное* а), *выполняется для клеток обращенной цепи.*

Для доказательства леммы вспомним, что четыре марковских свойства

1. $P\left(e_i^{(k)}/e_j^{(k-1)}, e_l^{(k-2)}, \ldots, e_s^{(k-r)}\right) = P\left(e_i^{(k)}/e_j^{(k-1)}\right)$;
2. $P\left(e_v^{(h)}/e_n^{(h+1)}, \ldots, e_m^{(h+t)}\right) = P\left(e_v^{(h)}/e_n^{(h+1)}\right)$;
3. $P\left(e_q^{(d)}, e_p^{(d-1)}, \ldots, e_w^{(d-l)}\right) = P\left(e_w^{(d-l)}\right) \ldots P\left(e_q^{(d)}/e_p^{(d-1)}\right)$;
4. $P\left(e_c^{(z)}, e_g^{(z+1)}, \ldots, e_f^{(z+x)}\right) = P\left(e_f^{(z+x)}\right) \ldots P\left(e_c^{(z)}/e_g^{(z+1)}\right)$

эквивалентны, если они имеют место при любых конечных верхних индексах, $k, r, \ldots, z, x$ и при нижних индексах $i, \ldots, f$ из одного и того же множества состояний.

Кроме того, мы учитываем, что однородная эргодическая марковская цепь с положительными предельными вероятностями при обращении сохраняет те же предельные вероятности.

Докажем, теперь, что (3) влечет соотношение (5). Действительно,

$$P\left(a_{\mathrm{I}}^{(k)}/a_{\mathrm{J}}^{(k-2)}, a_{\mathrm{L}}^{(k-2)}, \ldots, a_{\mathrm{S}}^{(k-r)}\right) = \sum_{s, \ldots, l, j, i} P\left(\alpha_{\mathrm{S}s}\right) \ldots$$

$$\ldots P\left(\alpha_{\mathrm{J}j}^{(k)}/\alpha_{\mathrm{L}l}^{(k-1)}\right) P\left(\alpha_{\mathrm{I}i}^{(k)}/\alpha_{\mathrm{J}j}^{(k-1)}\right) \Big/ \sum_{s, \ldots, l, j} P\left(\alpha_{\mathrm{S}s}\right) \ldots P\left(\alpha_{\mathrm{J}j}^{(k)}/\alpha_{\mathrm{L}l}^{(k-1)}\right). \tag{6}$$

Вычислим сначала внутреннюю сумму $\sum_i P\left(\alpha_{\mathrm{I}i}^{(k)}/\alpha_{\mathrm{J}j}^{(k-1)}\right)$, которая, со-

---

* В дальнейшем, говоря о марковости, мы будем подразумевать выполнение (3).

гласно условию а) леммы, не зависит от j, т. е.

$$\sum_i P\,(\alpha_{\mathrm{I}\,i}^{(k)}/\alpha_{\mathrm{J}\,j}^{(k-1)}) = c_{\mathrm{IJ}}.$$

Таким образом, вместо (6) получаем c_{IJ}. Аналогично подсчитываем $P\,(a_{\mathrm{I}}^{(k)}/a_{\mathrm{J}}^{(k-1)})$ и убеждаемся в совпадении обоих выражений.

Условие б) леммы влечет марковское свойство для обращенной последовательности и, следовательно, в силу марковских свойств 1) — 4), влечет также марковское свойство для прямой последовательности.

Используя лемму, докажем теорему 1. Согласно (2), имеем

$$\sum_i P\,(\alpha_{\mathrm{I}\,i}^{(k)}/\alpha_{\mathrm{R}\,r}^{(k-1)}) = P\,(\bigcup_i \alpha_{\mathrm{I}\,i}/\alpha_{\mathrm{R}\,r}) = c_{\mathrm{RI}}\,P\,(a_{\mathrm{I}});$$

это выражение не зависит от r и, таким образом, в клетке RI строки имеют постоянную сумму.

Теорема 2. *Для любого стохастического вектора*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P\,(a_{\mathrm{I}}) \\ P\,(a_{\mathrm{J}}) \\ P\,(a_{\mathrm{R}}) \end{pmatrix}$$

с ненулевыми элементами найдется такая матрица переходных вероятностей $\mathbf{D}$ *из класса матриц, удовлетворяющих модели, что*

$$\widetilde{\mathbf{D}}\mathbf{P} = \mathbf{P}, \tag{7}$$

где $\sim$ *— означает транспонирование.*

Доказательство. Рассмотрим симметричную матрицу C с положительными элементами c_{IJ}, выбранными так, что

$$0 \leqslant c_{\mathrm{II}} < 1, \quad \mathbf{CP} = \mathbf{e},$$

где $\mathbf{e}$ — единичный вектор-столбец. Построение такой матрицы возможно для матрицы любого (в частности, третьего) порядка. Вычислим матрицу переходных вероятностей D_{IJ} для случайной последовательности a, исходя из модели (2) и (3). При вычислении используем также несовместимость событий $\alpha_{\mathrm{I}\,i}^{(k)}$ и $\alpha_{\mathrm{R}\,r}^{(k)}$, если имеет место хотя бы одно из неравенств $\mathrm{I} \neq \mathrm{R},\ i = r$.

Тогда

$$P\,(a_{\mathrm{I}}^{(k)}/a_{\mathrm{J}}^{(k-1)}) = P\,(\bigcup_i \alpha_{\mathrm{I}\,i}^{(k)}/\bigcup_j \alpha_{\mathrm{J}\,j}^{(k-1)}) = \sum_{i,\,j} P\,(\alpha_{\mathrm{I}\,i}^{(k)}/\alpha_{\mathrm{J}\,j}^{(k-1)})\,P\,(\alpha_{\mathrm{J}\,j}) \Big/ \sum_j P\,(\alpha_{\mathrm{J}}\ ) = \tag{8}$$

$$= \sum_j \Big[P\,(\alpha_{\mathrm{J}\,j}) \sum_i P\,(\alpha_{\mathrm{I}\,i}^{(k)}/\alpha_{\mathrm{J}\,j}^{(k-1)})\Big] \Big/ P\,(a_{\mathrm{J}}) = \sum_j P\,(\alpha_{\mathrm{J}\,j})\,c_{\mathrm{R\,I}}P\,(a_{\mathrm{I}})/P\,(a_{\mathrm{J}}) = c_{\mathrm{R\,I}}P\,(a_{\mathrm{I}}).$$

Пусть

$$\mathbf{L}_p = \begin{pmatrix} P\,(a_{\mathrm{I}}) & 0 & 0 \\ 0 & P\,(a_{\mathrm{J}}) & 0 \\ 0 & 0 & P\,(a_{\mathrm{R}}) \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathbf{D} = \mathrm{C}L_p$, $\mathbf{P} = \mathbf{L}_p\mathbf{e}$, а $\mathbf{D}$ состоит из положительных элементов и $\mathbf{De} = \mathbf{CL}_p\mathbf{e} = \mathbf{CP} = \mathbf{e}$. Таким образом, $\mathbf{D}$ — стохастическая матрица.

Условие согласованности (7) выполняется, так как

$$\widetilde{\mathbf{D}}\mathbf{P} = \mathbf{L}_p\mathbf{CL}_p\mathbf{e} = \mathbf{L}_p\mathbf{CP} = \mathbf{L}_p\mathbf{e} = \mathbf{P}.$$

Теорема 2 доказывает, что модель может описывать двуполевошпатовые граниты любого состава.

Непосредственное рассмотрение (4) при учете модели позволяет доказать, что последовательность a обратима, т. е.

$$P\,(a_{\mathrm{I}}^{(k)}/a_{\mathrm{R}}^{(k-1)}) = \frac{P\,(a_{\mathrm{I}})}{P\,(a_{\mathrm{R}})}\,P\,(a_{\mathrm{R}}^{(k)}/a_{\mathrm{I}}^{(k-1)}), \tag{9}$$

и для нее имеют место неравенства

$$P\,(a_{\mathrm{I}}\,/\,a_{\mathrm{I}}) < P\,(a_{\mathrm{I}}) \text{ для } \mathrm{I} = \mathrm{Q, Or, Ab}. \tag{10}$$

В предыдущей модели имело место точное выполнение равенств

$$P\,(a_{\mathrm{I}}\,/\,a_{\mathrm{R}})\,/\,P\,(a_{\mathrm{J}}\,/\,a_{\mathrm{R}}) = P\,(a_{\mathrm{I}})\,/\,P\,(a_{\mathrm{J}}) \tag{11}$$

при одновременном $\mathrm{I} \neq \mathrm{R}$, $\mathrm{J} \neq \mathrm{R}$.

В настоящей модели (11) будут выполняться, если константы c_{IJ} удовлетворяют условию $c_{\mathrm{RI}} = c_{\mathrm{RJ}}$ при $\mathrm{R} \neq \mathrm{I}$; $\mathrm{R} \neq \mathrm{J}$, что, судя по проведенным ранее расчетам ([2]), часто приближенно удовлетворяется для магматических гранитов.

Свойства (5), (7) — (10) и в некоторых случаях (11) последовательности (4) должны статистически обнаруживаться у последовательностей зерен кварца, калиевого полевого шпата и кислого плагиоклаза у гранитов, возникших из расплава в условиях рассмотренной модели и не подвергшихся метасоматической переработке. Это наблюдалось нами и должно быть проверено на обширном материале.

Авторы выражают искреннюю признательность А. М. Кагану, Г. И. Петрашень и Б. П. Харламову за детальный разбор математической части изложенной модели.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
24 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Б. Вистелиус, ДАН, **170**, № 3, 653 (1966). [2] А. Б. Вистелиус, ДАН, **172**, № 1, 165 (1967). [3] O. F. Tuttle, N. L. Bowen, Mem. Geol. Soc. Am., **74** (1960).