Проблемы физики, математики и техники, № 3 (40), 2019

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9+537.86

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ ОТРАЖЕНИЕМ ОТ НАГРУЗКИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПАХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, А.И. Кулыба

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

RESEARCH OF THE VAN DER POL OSCILLATOR WITH DELAYED REFLECTION FROM LOAD AT VARIOUS TYPES OF RANDOM EFFECTS

S.P. Zhogal, S.I. Zhogal, A.I. Kulyba

F. Scorina Gomel State University

Исследованы одночастотные колебания в автоколебательной системе ван дер Поля с запаздываниями в цепи обратной связи и от отраженной нагрузки при одновременных аддитивных и мультипликативных случайных воздействиях.

Ключевые слова: *стохастические дифференциальные уравнения*, *одночастотные колебания*, *запаздывание*, *осциллятор ван дер Поля*, *аддитивных случайные воздействия*, *мультипликативные случайные воздействия.*

Single-frequency oscillations in a van der Pol self-oscillating system with delays in the feedback circuit and from the reflected load under simultaneous additive and multiplicative random influences are investigated.

Keywords: *stochastic differential equations*, *single-frequency oscillations*, *delay*, *van der Pol oscillator*, *additive random effects*, *multiplicative random effects.*

Введение

Исследование систем с запаздыванием является актуальной задачей и предметом исследований многих научных работ [1]–[7]. Такие системы могут служить математическими моделями реальных объектов и явлений механики, оптики, радиофизики, кибернетики.

Актуальной является задача исследования случайных колебаний в подобных системах при наличии силовых (аддитивных) и параметрических (мультипликативных) случайных воздействий [7], [8].

1 Постановка задачи

Исследуем флуктуации колебаний в автогенераторе ван дер Поля с учетом как запаздывания в цепи обратной связи генератора, так и запаздывания отраженного сигнала от удаленной нагрузки. В качестве математической модели такой автоколебательной системы можно рассматривать стохастическое дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega_0^2x(t)=$$
$$=\varepsilon\alpha\left[1-\beta x^2(t)\right]\frac{dx(t-\tau_1)}{dt}+kx(t-\tau_2)+ \quad (1.1)$$
$$+\sqrt{\varepsilon}\left[C_1\frac{dw_1(t)}{dt}+C_2x(t-\tau_2)\frac{dw_2(t)}{dt}\right],$$

где $\alpha,\beta,k,\omega_0,C_1,C_2,\tau_1,\tau_2$ – положительные постоянные, ε – малый положительный параметр, $w_1(t), w_2(t)$ – стохастически независимые винеровские процессы единичной интенсивности. Здесь ω_0 – собственная частота колебаний системы, k – коэффициент отражения сигнала от нагрузки, τ_1 – запаздывание обратной связи, τ_2 – запаздывание отражения от удаленной нагрузки. Отметим, что (1.1) может служить простейшей математической моделью доплеровского автодина [2]. Исследуем случай одночастотных стохастических колебаний в системе (1.1).

2 Вывод условий устойчивости колебаний

Применяя к (1.1) метод усреднения в сочетании с аппаратом уравнений Колмогорова – Фоккера – Планка [7], [8], будем искать решение в виде

$$x(t)=a(t)\cos\left[\omega_0t+\theta(t)\right]$$
$$\frac{dx(t)}{dt}=y(t)=-\omega_0a(t)\sin\left[\omega_0t+\theta(t)\right], \quad (1.2)$$

где $a(t),\theta(t)$ – медленно меняющиеся случайные функции.

Выражая $a(t),\theta(t)$ через $x(t)$, $y(t)$, получаем

$$a(t)=\left[x^2(t)+\frac{1}{\omega_0^2}y^2(t)\right]^{\frac{1}{2}},$$
$$\theta(t)=-\omega_0t-\operatorname{arctg}\frac{y(t)}{\omega_0x(t)}. \quad (2.1)$$

Применяя к выражениям (2.1) формулу Ито дифференцирования сложной случайной функции [7], усредняя нефлуктуационные члены в полученных стохастических дифференциальных уравнениях и опуская запаздывания у медленно меняющихся переменных, получаем

$$da = \left\{ \frac{1}{2}\varepsilon\alpha a\cos(\omega_0\tau_1) - \frac{1}{8}\varepsilon\alpha\beta a^3\cos(\omega_0\tau_1) - \right.$$
$$- \frac{k}{2\omega_0}a\sin(\omega_0\tau_2) + \frac{1}{4\omega_0^2 a}\left(\varepsilon C_1^2 + \frac{1}{2}\varepsilon C_2^2 a^2\right) +$$
$$\left. + \frac{1}{16\omega_0^2}\varepsilon C_2^2 a\cos(2\omega_0\tau_2)\right\}dt -$$
$$- \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\varepsilon}C_1\sin(\omega_0 t + \theta)dw_1 -$$
$$- \frac{1}{2\omega_0}\sqrt{\varepsilon}C_2 a_{\tau_2} \times \left[\sin(\omega_0\tau_2 + \theta - \theta_{\tau_2}) + \right.$$
$$\left. + \sin(2\omega_0 t - \omega_0\tau_2 + \theta + \theta_{\tau_2})\right]dw_2,$$
$$d\theta = \left\{ -\frac{1}{2}\varepsilon\alpha\sin(\omega_0\tau_1) + \frac{3}{8}\varepsilon\alpha\beta a^2\sin(\omega_0\tau_1) - \right.$$
$$\left. - \frac{k}{2\omega_0}\cos(\omega_0\tau_2) - \frac{1}{8\omega_0^2}\varepsilon C_2^2\sin(2\omega_0\tau_2)\right\}dt -$$
$$- \frac{1}{\omega_0 a}\sqrt{\varepsilon}C_1\cos(\omega_0 t + \theta)dw_1 -$$
$$- \frac{1}{2\omega_0 a}\sqrt{\varepsilon}C_2 a_{\tau_2}\left[\cos(\omega_0\tau_2 + \theta - \theta_{\tau_2}) + \right.$$
$$\left. + \cos(2\omega_0 t - \omega_0\tau_2 + \theta + \theta_{\tau_2})\right]dw_2,$$

где $a_{\tau_i} = a(t-\tau_i),\ \theta_{\tau_i} = \theta(t-\tau_i),\ i = 1, 2.$

Полученная система описывает двумерный марковский процесс, для которого можно построить уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка (КФП), в котором, согласно [7], проведем обычное усреднение. Полученное полностью усредненное уравнение КФП для системы (1.1) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,a,\theta) = -\frac{\partial}{\partial a}\left\{\left[\frac{1}{8}\varepsilon\alpha a\cos(\omega_0\tau_1)(4-\beta a^2) - \right.\right.$$
$$- \frac{k}{2\omega_0}a\sin(\omega_0\tau_2) + \frac{1}{4\omega_0^2 a}\varepsilon C_1^2 + \frac{1}{8\omega_0^2}\varepsilon C_2^2 a +$$
$$\left.\left. + \frac{1}{16\omega_0^2}\varepsilon C_2^2 a\cos(2\omega_0\tau_2)\right]p(t,a,\theta)\right\} +$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\left[\frac{1}{2}\varepsilon\alpha\sin(\omega_0\tau_1) - \frac{3}{8}\varepsilon\alpha\beta a^2\sin(\omega_0\tau_1) + \right.\right.$$
$$+ \frac{k}{2\omega_0}\cos(\omega_0\tau_2) + \qquad (2.2)$$
$$\left.\left. + \frac{1}{8\omega_0^2}\varepsilon C_2^2\sin(2\omega_0\tau_2)\right]p(t,a,\theta)\right\} +$$
$$+ \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left\{\left[\frac{1}{2\omega_0^2}C_1^2 + \frac{1}{4\omega_0^2} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times C_2^2 a^2\left(1 - \frac{1}{2}\cos(2\omega_0\tau_2)\right)\right]p(t,a,\theta)\right\} +$$
$$+ \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial a\partial\theta}\left\{\frac{1}{8\omega_0^2}C_2^2 a\sin(2\omega_0\tau_2)p(t,a,\theta)\right\} +$$
$$+ \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left\{\left[\frac{1}{2\omega_0^2 a^2}C_1^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{4\omega_0^2}C_2^2\left(1 + \frac{1}{2}\cos(2\omega_0\tau_2)\right)\right]p(t,a,\theta)\right\}.$$

Поскольку в уравнении (2.2) коэффициенты не зависят от $\theta(t)$, можно составить уравнение КФП для плотности распределения амплитуды колебаний $a(t)$, которое имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,a) = -\frac{\partial}{\partial a}\left\{\left[\frac{1}{8}\varepsilon\alpha a\cos(\omega_0\tau_1)(4-\beta a^2) - \right.\right.$$
$$- \frac{k}{2\omega_0}a\sin(\omega_0\tau_2) + \frac{1}{4\omega_0^2 a}\varepsilon C_1^2 + \frac{1}{8\omega_0^2}\varepsilon C_2^2 a +$$
$$\left.\left. + \frac{1}{16\omega_0^2} \times \varepsilon C_2^2 a\cos(2\omega_0\tau_2)\right]p(t,a)\right\} + \qquad (2.3)$$
$$+ \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left\{\left[\frac{1}{2\omega_0^2}C_1^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{4\omega_0^2}C_2^2 a^2\left(1 - \frac{1}{2}\cos(2\omega_0\tau_2)\right)\right]p(t,a)\right\}.$$

Исходя из уравнения (2.3), для стационарной плотности распределения амплитуды колебаний, используя формулу [9]

$$p_{cm}(a) = \frac{C}{K_{11}(a)}\exp\left\{2\int\frac{K_1(a)}{K_{11}(a)}da\right\},$$

где

$$K_1(a) = \frac{1}{8}\alpha a\cos(\omega_0\tau_1)(4-\beta a^2) -$$
$$- \frac{k}{2\varepsilon\omega_0}a\sin(\omega_0\tau_2) + \frac{1}{4\omega_0^2 a}C_1^2 +$$
$$+ \frac{1}{8\omega_0^2}C_2^2 a + \frac{1}{16\omega_0^2}C_2^2 a\cos(2\omega_0\tau_2),$$
$$K_{11}(a) = \frac{1}{2\omega_0^2}C_1^2 + \frac{1}{4\omega_0^2}C_2^2 a^2\left(1 - \frac{1}{2}\cos(2\omega_0\tau_2)\right),$$

C – постоянная нормировки, определяемая из равенства

$$\int_0^\infty p_{cm}(a)da = 1,$$

получаем

$$p_{cm}(a) = \frac{8\omega_0^2 Ca}{C_2^2(2-\cos(2\omega_0\tau_2))} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{\omega_0^2\alpha\beta\cos(\omega_0\tau_1)}{C_2^2(2-\cos(2\omega_0\tau_2))}a^2\right\} \times \qquad (2.4)$$
$$\times \left[\frac{4C_1^2}{C_2^2(2-\cos(2\omega_0\tau_2))} + a^2\right]^{z(C_1,C_2,\tau_1,\tau_2)},$$

где

$$z(C_1,C_2,\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{C_2^2(2-\cos(2\omega_0\tau_2))}\times$$
$$\times\left[4\omega_0\left(\omega_0\alpha\cos(\omega_0\tau_1)-\frac{k}{\varepsilon}\sin(\omega_0\tau_2)\right)-\right.$$
$$\left.-2C_2^2\left(1-\cos(2\omega_0\tau_2)\right)\right]+$$
$$+\frac{4C_1^2\omega_0^2\alpha\beta\cos(\omega_0\tau_1)}{C_2^4(2-\cos(2\omega_0\tau_2))^2}.$$

Анализируя выражение (2.4), получаем, что наиболее вероятными в системе (1.1) будут колебания с амплитудой

$$a^2=\left[\frac{2}{\beta}-\frac{2k\sin(\omega_0\tau_2)}{\varepsilon\omega_0\alpha\beta\cos(\omega_0\tau_1)}\right]-$$
$$-\frac{C_2^2(2-3\cos(2\omega_0\tau_2))}{4\omega_0^2\alpha\beta\cos(\omega_0\tau_1)}+ \tag{2.5}$$
$$+\left\{\left[\left(\frac{2}{\beta}-\frac{2k\sin(\omega_0\tau_2)}{\varepsilon\omega_0\alpha\beta\cos(\omega_0\tau_1)}\right)-\frac{C_2^2(2-3\cos(2\omega_0\tau_2))}{4\omega_0^2\alpha\beta\cos(\omega_0\tau_1)}\right]^2+\right.$$
$$\left.+\frac{2C_1^2}{\omega_0^2\alpha\beta\cos(\omega_0\tau_1)}\right\}^{1/2}.$$

3 Анализ полученных результатов

Из анализа полученного для a^2 соотношения (2.5) получаем, что при $C_1\equiv C_2\equiv 0$ одночастотные колебания, возникающие в системе (1.1), соответствуют колебаниям в детерминированном случае, причем устойчивыми они будут лишь при выполнении условия

$$\frac{k\sin(\omega_0\tau_2)}{\varepsilon\omega_0\alpha\cos(\omega_0\tau_1)}<1, \tag{3.1}$$

т.е. при достаточно большой величине частоты ω_0 и параметра α, а также при малой величине параметра k возникающие в системе колебания будут устойчивыми. Рассматривая запаздывания τ_1 и τ_2 такими, что

$$0\le\omega_0\tau_i<\frac{\pi}{2},\ i=1,2$$

(что вполне соответствует условиям работы реальных систем), получаем, что аддитивные шумы приводят к возрастанию амплитуды колебаний, а случайные возмущения сигнала, отраженного от удаленной нагрузки, влияют на амплитуду колебаний следующим образом:
при $\cos(2\omega_0\tau_2)>2/3$ увеличивают амплитуду колебаний, при $\cos(2\omega_0\tau_2)=2/3$ не влияют на величину амплитуды колебаний, при

$$0<\cos(2\omega_0\tau_2)<2/3$$

уменьшают амплитуду колебаний.

Следует также отметить, что, как вытекает из анализа соотношения (2.5), чем выше частота колебаний ω_0, тем меньше сказывается влияние шумов на работу системы. В работе [4], в которой исследуется автодинная система без учета шумов, показано, что с ростом коэффициента отражения k нарушается периодичность процессов в автодине. Полученное нами условие (3.1) устойчивости колебаний вполне согласуется с этим выводом, поскольку из него следует, что при достаточно больших значениях k одночастотные устойчивые колебания в системе (1.1) будут отсутствовать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Time delay systems: theory*, *numerics*, *applications and experiments* / Eds T. Insperger, T. Ersal, G. Orosz. – Cham, Switzerland: Springer, 2017. – 362 p.

2. *Landa*, *P.S.* Nonlinear oscillations and waves in dynamical systems / P.S. Landa. – Dordrecht: Springer, 2013. – 500 p.

3. *Жогаль*, *С.П.* О существовании и единственности решений одной сложной стохастической дифференциальной системы с запаздыванием / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, А.В. Клименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2 (31). – С. 50–54.

4. *Балакин*, *М.И.* Мультистабильность и сложные колебательные режимы в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки / М.И. Балакин, Н.М. Рыскин // Письма в ЖТФ. – 2019. – Т. 45, вып. 6. – С. 33–35.

5. *Жогаль*, *С.П.* О непрерывной в среднем квадратическом зависимости от начальных данных решений одной сложной стохастической дифференциальной системы с запаздыванием / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2 (31). – С. 50–55.

6. *Коржик*, *Р.И.* Влияние запаздывания на стационарные состояния неавтономного осциллятора ванн дер Поля / Р.И. Коржик, С.П. Жогаль // Известия гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. – 2010. – № 3 (60). – С. 206–210.

7. *Рубаник*, *В.П.* Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием / В.П. Рубаник. – Мн.: Изд-во «Университетское», 1985. – 143 с.

8. *Ланда*, *П.С.* Возбуждение хаотических и стохастических колебаний в различных системах / П.С. Ланда // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2010. – Т. 18, № 1. – С. 3–10.

9. *Стратонович*, *Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике / Р.Л. Стратонович. – М.: Сов. радио, 1961. – 558 с.

Поступила в редакцию 18.02.19.