

ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ЗАДАННЫХ ДВИЖЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОГРАНИЧЕННЫМИ ОПТИМАЛЬНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ

А.В. Лубочкин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

THE GIVEN MOTIONS REALIZATION OF DYNAMIC SYSTEMS BY BOUNDED OPTIMAL CONTROLS OF LINEAR-QUADRATIC PROBLEMS

A.V. Lubochkin

F. Scorina Gomel State University

В классе ограниченных управлений рассматривается задача осуществления заданных движений динамическими системами. Методами оптимального управления строится алгоритм работы регулятора, который в режиме реального времени вычисляет (генерирует) текущие значения ограниченных обратных связей, с помощью которых замкнутая система устойчиво осуществляет заданное движение. Для решения этой задачи предлагается использовать реализацию оптимальной обратной связи линейно-квадратичных задач с ограничениями. Результаты иллюстрируются на задаче синтеза динамических систем, осуществляющих предельные циклы.

Ключевые слова: динамическая система, задача осуществления заданных движений, ограниченная стабилизирующая обратная связь, вспомогательная задача оптимального управления, регулятор.

The problem of the given motions realization of dynamic systems in the bounded control class is considered. The regulator operation algorithm is constructing with optimal control methods. According to this algorithm, in real-time, the current values of limited feedbacks are calculated (generates), with the help of which the closed-loop system stably carries out a given movement. To solve the problem the feedback optimal control realization of linear-quadratic problem with restrictions is suggested. The results are illustrated on the problem of dynamic systems synthesis, realizing limited cycles.

Keywords: dynamic system, given motions realization problem, bounded stabilizing feedback, auxiliary optimal control problem, regulator.

Введение

Возникновение теории оптимального управления связано с необходимостью решать возникающие на практике (или в других разделах науки) задачи. Среди таких источников можно привести несколько задач классической теории автоматического регулирования [1]: задачи регулирования, стабилизации, демпфирования, осуществления заданных движений. Согласно [1], целью задачи слежения является осуществление процесса «... изменения по заданным условиям какой-нибудь величины в машинах, аппаратах или иных технических устройствах». Задача осуществления движений [2] является одной из основных задач теории следящих систем [3]. Основные методы устойчивого слежения базируются на классической теории устойчивости движения [4]. Однако применяемые методы не учитывали ограничения на управления (учет которых естественен на практике), а также не предъявляли никаких требований к качеству переходных процессов. Теория оптимального управления за прошедшее время прошла огромный путь. Естественно задать вопрос, что дают методы оптимального управления для решения классических задач теории регулирования, актуальность которых несомненна и в нынешнее время.

Использование теории оптимального управления [5] может существенно расширить возможности средств теории следящих систем. В ее рамках можно естественным образом учитывать ограничения на управления (они входят в состав современных постановок задач оптимального управления), не задавать структуру обратных связей (а получать ее как решение экстремальной задачи), не только устойчиво осуществлять движения, но и добиваться высокого качества переходных процессов. Долгое время применение методов оптимального управления к решению подобных задач сдерживалось отсутствием эффективных методов синтеза оптимальных систем.

В данной работе описывается метод осуществления заданных движений динамическими системами, основанный на применении методов оптимального управления и использует результаты, полученные по синтезу оптимальных систем для линейных [6], а также линейно-квадратичных [7]–[9] задач. Новый подход к проблеме конструирования оптимальных обратных связей опирается на разработанные ранее быстрые методы коррекции программных решений и бурное развитие вычислительной техники. Данную работу можно рассматривать как развитие идей работ [10]–[13], в которых указанные

методы оптимального управления были использованы для решения задач стабилизации и регулирования. Использованию с целью решения задачи осуществления заданных движений линейно-негладких задач посвящена работа [14].

1 Постановка задачи

Пусть поведение динамической системы с управлением на промежутке $t \geq 0$ описывается уравнением [14]

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0 \quad (1.1)$$

$$(x = x(t) \in R^n, \quad u = u(t) \in R, \quad t \geq 0;$$

$$\text{rank}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = n).$$

Будем считать, что доступные управления удовлетворяют неравенству

$$|u(t)| \leq L, \quad t \geq 0 \quad (0 < L < \infty).$$

Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим движение на фазовой плоскости

$$x = x_f(t), \quad t \geq 0, \quad (1.2)$$

заданное кусочно-гладкой функцией $x_f(t)$, $t \geq 0$.

Говорят, что движение (1.2) допустимо (осуществимо), если существует такое доступное управление $u_f(t)$, $|u_f(t)| \leq L$, $t \geq 0$, что выполняется равенство

$$\dot{x}_f(t) = Ax_f(t) + bu_f(t), \quad t \geq 0.$$

Пусть $G \subset R^n$ – область фазового пространства системы (1.1), внутренность которой содержит движение (1.2): $x_f(t) \in \text{int } G$, $t \geq 0$.

Определение [14]. Функция

$$u = u(t, x), \quad x \in G, \quad t \geq 0, \quad (1.3)$$

называется ограниченной дискретной обратной связью, осуществляющей движение (1.2) в области G , если выполняются условия:

$$1) \quad u(t, x_f(t)) = u_f(t), \quad t \geq 0;$$

$$2) \quad |u(t, x)| \leq L, \quad x \in G, \quad t \geq 0;$$

$$3) \quad \text{траектория замкнутой системы}$$

$$\dot{x} = Ax + bu(t, x), \quad x(0) \in G, \quad (1.4)$$

представляет собой непрерывное решение уравнения (1.1) с дискретным управлением

$$u(t) = u(kv, x(kv)), \quad t \in [kv, (k+1)v], \quad (1.5)$$

$$k = 0, 1, \dots;$$

4) решение $x_f(t)$, $t \geq 0$, замкнутой системы (1.4) асимптотически устойчиво в G .

При этом с точки зрения практики при фактическом построении обратной связи естественно потребовать выполнения следующих свойств:

$$5) \quad \text{область притяжения } G \text{ достаточно большая};$$

$$6) \quad \text{переходные процессы } x(t) \rightarrow x_f(t), \quad t \rightarrow \infty,$$

в замкнутой системе (1.4) являются в некотором смысле наилучшими (по отношению к выбранному критерию качества).

Синтез обратных связей (1.3), обладающих перечисленными свойствами, составляет суть задачи осуществления движения [14].

Очевидно, что таким образом определенная обратная связь может быть построена многими способами. Построение реализации в реальном времени обратной связи (1.3) в каждом конкретном процессе управления (осуществления движения), т. е. вдоль реализующейся в конкретном процессе траектории $x^*(t)$, $t \geq 0$, динамической системы, будем вести, используя позиционное решение вспомогательной (сопровождающей) задачи оптимального управления.

2 Сопровождающая задача оптимального управления

Выберем параметр метода θ , $0 < \theta < \infty$, и целое число $N > 1$. В классе дискретных управлений вида (1.5) с периодом квантования $v = \theta / N$:

$$u(t) = u(kv) = u_k, \quad t \in [\tau + kv, \tau + (k+1)v], \quad (2.1)$$

$$k = 0, N-1 \quad (\theta = Nv),$$

рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления

$$B_\theta(\tau, z) = \min_{\tau} \int_{\tau}^{\tau+\theta} (u(t) - u_f(t))^2 dt,$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(\tau) = z,$$

$$x(\tau + \theta) = x_f(\tau + \theta), \quad \tau \geq 0, \quad (2.2)$$

$$|u(t)| \leq L, \quad t \in T = [\tau, \tau + \theta],$$

где τ – текущий момент времени коррекции управления.

Решение задачи (2.2) можно строить в различных классах управлений. Известно [15], что предельным для нее является класс непрерывных кусочно-гладких функций. Здесь, учитывая принятые выше соглашения, эта задача рассматривается в классе дискретных управлений (2.1).

Допустимой (дискретной) программой $u(t|\tau, z)$, $t \in T$, задачи (2.2) называют такую дискретную функцию (2.1), которая вместе с соответствующей ей траекторией динамической системы удовлетворяет всем ограничениям задачи (2.2). Оптимальной (дискретной) программой $u^0(t|\tau, z)$, $t \in T$, задачи (2.2) называют допустимую программу, которая доставляет минимум критерию качества задачи.

Пусть $u^0(t|\tau, z)$, $t \in T$, – оптимальная (дискретная) программа задачи (2.2) для позиции (τ, z) , $G_0(\tau) \subset R^n$ – множество всех векторов $z \in R^n$, для которых задача (2.2) с фиксированным τ имеет решение.

Функцию

$$u^0(\tau, z) = u^0(\tau|\tau, z), \quad z \in G_0(\tau), \quad (2.3)$$

$$\tau = kv, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

называют оптимальным стартовым (дискретным) управлением типа обратной связи для задачи (2.2). В [11]–[13] (для задач стабилизации и регулирования линейных систем) описан алгоритм работы регуляторов, которые способны в режиме

реального времени строить реализацию

$$u^*(t) = u^0(t, x^*(t)), \quad t \geq 0,$$

дискретной обратной связи (2.3) для каждой реализующейся траектории $x^*(t)$, $t \geq 0$, динамической системы.

Построение функции (2.3) в замкнутой форме (за исключением тривиальных ситуаций) вряд ли возможно. Однако при решении практических задач оптимального синтеза можно обойтись без этого, если привлечь микропроцессоры (на использование которых, как и [11]–[13], ориентирована данная работа). В классе дискретных управлений (2.1) задача (2.2) эквивалентна следующей задаче квадратичного программирования (горизонт управления $[\tau, \tau + \theta]$, очевидно, можно заменить горизонтом $[0, \theta]$):

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} (u_j - u_f)^2 &\rightarrow \min, \\ F(\theta)z + \sum_{j=0}^{N-1} u_j \int_{j\tau}^{(j+1)\tau} F(\theta - t)b \, dt &= x_f(\theta), \quad \tau \geq 0, \\ |u_j| &\leq L, \quad j = \overline{0, N-1}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\dot{F} = AF$, $F(0) = E$. И тогда для вычисления требуемых значений обратной связи (2.3), не зная явного выражения для нее, можно использовать метод коррекции близких задач (2.4) с помощью двойственного метода квадратичного программирования [16]. Очевидно, что в рассматриваемом случае (при использовании дискретной обратной связи) отпадает вопрос о существовании решения замкнутой системы.

В качестве дискретной реализации $u(t, x)$, $x \in G_\theta$, обратной связи (1.3), осуществляющей движение (1.2), и предлагается использовать реализацию $u^*(t)$, $t \geq 0$, обратной связи (2.3). Нетрудно показать, что обратная связь

$$u(t, x) = u^0(t, x), \quad x \in G_\theta(t), \quad (2.5)$$

решает задачу осуществления движений, т. е. удовлетворяет всем требованиям п. 1.

3 Свойства оптимальной обратной связи сопровождающей задачи оптимального управления

Очевидно, что

$$u^0(\tau, x_f(\tau)) = u_f(\tau, x_f(\tau)) = u_f(\tau),$$

т. е. $x_f(\tau)$, $\tau \geq 0$, – осуществимое движение:

$$x(\tau) \equiv x_f(\tau), \quad \tau \geq 0;$$

$$|u_f(\tau, x_f(\tau))| \leq L, \quad x_f(\tau) \in G_\theta(\tau), \quad \tau \geq 0.$$

По определению дискретной обратной связи, замкнутая система (1.4) с обратной связью

$$u(\tau, x(\tau)) = u^0(\tau, x_f(\tau)), \quad \tau \geq 0,$$

имеет решение при любом

$$x_f(\tau) \in G_\theta(\tau), \quad \tau \geq 0.$$

Используя метод функций Ляпунова, аналогично [13] нетрудно показать, что решение $x(t) = x_f(t)$, $t \geq 0$, системы (1.4) асимптотически устойчиво (при этом $B_\theta(\tau, z)$, $z \in G_\theta(\tau)$, $\tau > 0$, – функция Ляпунова). Очевидно, $B_\theta(\tau, x_f) = 0$; $B_\theta(\tau, z) > 0$ при $z \neq x_f$; $B_\theta(\tau, z)$, $z \in G_\theta(\tau)$, $\tau > 0$, – непрерывная функция, которая убывает (не возрастает) вдоль каждой траектории системы (1.4).

Таким образом, поскольку выполняются требования 1)–4) приведенного выше определения, обратная связь $u(t, x) = u^0(t, x)$, $x \in G_\theta(t)$, $t \geq 0$, является обратной связью, осуществляющей движение (1.2) в области G_θ .

Далее нетрудно показать, что с помощью выбора параметра θ множество G_θ можно построить почти совпадающим с областью G , т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\theta < \infty$, что в ε -окрестности множества G_θ будут содержаться все состояния, из которых можно вдоль траекторий системы (1.1) попасть в точку на требуемой траектории $x = x_f(t)$, $t \geq 0$, с помощью управлений, ограниченных по модулю числом L .

Качество переходных процессов в замкнутой системе определяется следующим экстремальным свойством:

$$\int_0^\infty (u^*(t) - u_f(t))^2 \, dt \leq \int_0^\theta (u^0(t | 0, z^*) - u_f(t))^2 \, dt.$$

Последнее неравенство означает, что энергия, затрачиваемая на весь переходный процесс осуществления движения (на бесконечном промежутке времени) не превосходит минимальных затрат энергии на перевод системы (1.1) из состояния $x(0) = z^*$ в состояние $x_f(\theta)$ на заданной траектории за время θ (здесь $u^*(t)$, $t \geq 0$, – реализующееся в конкретном процессе управление, соответствующее начальному состоянию $x(0) = z^*$).

Таким образом, в некотором смысле выполняются также и требования 5) и 6).

4 Алгоритм работы регулятора

Пусть известны: начальное состояние $x_0 = x_0^*$ системы (1.1), движение $x_f(t)$, $t \geq 0$, и управление $u_f(t)$, $|u_f(t)| < l < \infty$, $t \geq 0$.

На начальном промежутке времени $[0, \nu]$ регулятор использует оптимальную (дискретную) программу $u^0(t | 0, x_0^*)$, $t \in T$, задачи (2.2) или, что то же самое, оптимальный план $(u_j^0(0, x_0^*), j = \overline{0, N-1})$ эквивалентной ей (в выбранном классе управлений) задачи (2.4), соответствующей позиции $(0, x_0^*)$. Эта задача может содержать лишь априорную информацию, и поэтому указанный оптимальный план может быть

построен заранее, до начала процесса управления в момент $\tau = 0$, не взирая на затраты машинного времени (полное решение). Строить решение задачи (2.4) можно разными методами. Здесь (с целью единообразия алгоритма) этот план предлагается строить с помощью двойственного метода квадратичного программирования [16], поскольку в дальнейшем именно этот метод применяется для коррекции решений близких задач (2.4). Управление

$$u^*(t) = u^0(t | 0, x_0^*) \equiv u^0(0 | 0, x_0^*) \equiv u_0^0(0, x_0^*) \equiv u^*(0), \\ t \in [0, v],$$

подается на вход системы (1.1):

$$u(\tau) = u^*(\tau), \quad \tau \in [0, v],$$

и порождает ее состояние $x^*(v) = x^*(v | 0, x_0^*)$.

Предположим, что для моментов $0, v, \dots, (s-1)v$ регулятором были вычислены значения обратной связи $u^*(0), u^*(v), \dots, u^*((s-1)v)$, где $u^*(kv) \equiv u_0^0(kv, x^*(kv))$, $k = \overline{0, s-1}$, и замкнутая система (1.4) оказалась в состоянии

$$x^*(\tau) = x^*(\tau | \tau-1, x^*(\tau-1)) \equiv x^*(\tau | 0, x_0^*), \quad \tau = sv.$$

Используя оптимальную программу сопровождающей задачи (2.2), а точнее оптимальный план эквивалентной ей в рассматриваемом случае задачи (2.4), для предыдущего момента $\tau - v = (s-1)v$, перед решением которой система находилась в состоянии $x^*(\tau - v) = x^*((s-1)v) = x^*((s-1)v | 0, x_0^*)$, с помощью двойственного метода [16] производится коррекция решения сопровождающей задачи для нового состояния $x^*(\tau)$. Указанный метод коррекции используется в силу того, что задача (2.4) для двух соседних моментов $\tau - v$ и τ отличается только начальными условиями $x^*(\tau - v)$ и $x^*(\tau)$, при этом это отличие тем меньше, чем меньше v , а среди всех известных методов решения задач квадратичного программирования именно двойственный метод является наиболее эффективным методом коррекции близких задач. Построив оптимальную программу $u^0(t | 0, x^*(sv))$, $t \in T$, задачи (2.2) – оптимальный план $(u_j^0(0, x^*(sv)), j = \overline{0, N-1})$ задачи (2.4) для позиции $(0, x^*(sv))$, получаем реализацию

$$u^*(t) \equiv u^0(0 | 0, x^*(sv)) \equiv u_0^0(0, x^*(sv)) \equiv u^*(sv), \\ t \in [0, v],$$

стартовой обратной связи, которая подается на вход системы (1.1) на промежутке времени $[sv, (s+1)v]$:

$$u(\tau) = u^*(\tau - sv), \quad \tau \in [sv, (s+1)v].$$

Если время коррекции решений задачи (2.4) при переходе от начального условия $z = x^*(\tau - v)$

к начальному условию $z = x^*(\tau)$, а, значит, и для вычисления реализации обратной связи $u^*(\tau)$, не превосходит времени v , то говорят о возможности решения задачи осуществления движения в режиме реального времени. Поскольку количество операций, которые выполняются на каждом шаге работы регулятора, можно оценить, то для каждой конкретной системы можно подобрать такие микропроцессорные устройства, с помощью которых можно реализовать регулятор в режиме реального времени. С другой стороны, для каждого микропроцессора можно указать порядок систем, для которых реализуем указанный режим.

5 Примеры

Пример 5.1. Рассмотрим систему управления [14]

$$\ddot{x} + x = u.$$

Введя обозначения $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, получим систему двух уравнений: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1 + u$, т. е. систему вида (1.1). Эта система при выключенном управлении: $u(t) \equiv 0$, $t \geq 0$, имеет периодические движения для любых начальных состояний. Однако эти решения не являются предельными циклами. Рассмотрим одно такое движение:

$$x^2(t) + \dot{x}^2(t) = 1, \quad t \geq 0, \quad (5.1)$$

и построим обратную связь (2.5), с которой замкнутая система

$$\ddot{x} + x = u(t, x) \quad (5.2)$$

имеет периодическое решение (5.1) в качестве асимптотически устойчивого предельного цикла.

Алгоритм работы регулятора программно реализован на языке С, работоспособность программы проверена на описанном примере. Были построены регуляторы для двух наборов параметров сопровождающей задачи (2.4):

$$1) \theta = 1, \quad v = 0.04, \quad L = 4;$$

$$2) \theta = 1, \quad v = 0.04, \quad L = 2;$$

$$u_f(t) \equiv 0, \quad t \geq 0.$$

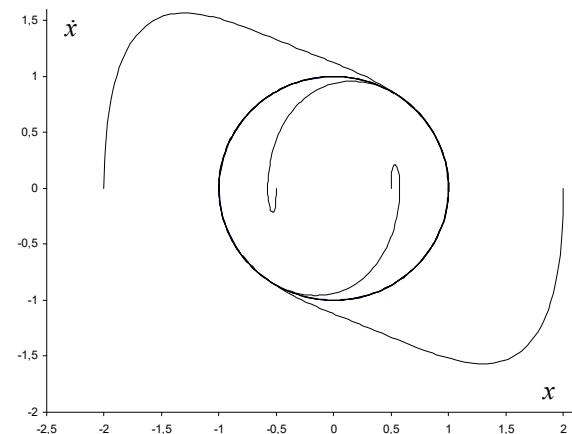


Рисунок 5.1 – Фазовые траектории замкнутой системы

Первый набор параметров был использован для следующих начальных условий динамической системы: $x_0 = (-2, 0)$, $x_0 = (2, 0)$, второй – для условий $x_0 = (-0.5, 0)$, $x_0 = (0.5, 0)$.

На рисунке 5.1 представлены фазовые траектории замкнутой системы (5.2) для указанных начальных состояний и соответствующих им параметров вспомогательной задачи.

Пример 5.2. Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}_1 = x_2 + u, \quad \dot{x}_2 = -x_2 - u, \quad (5.3)$$

которая при выключенном управлении имеет периодические движения, среди которых нет следующего движения [14]

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 1. \quad (5.4)$$

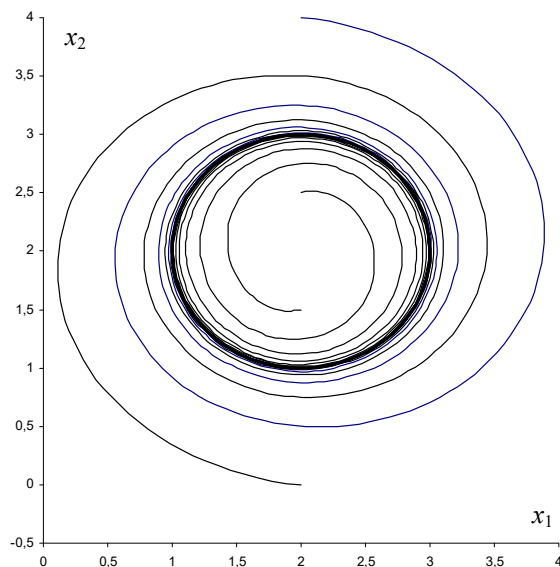


Рисунок 5.2 – Фазовые траектории для основного набора параметров

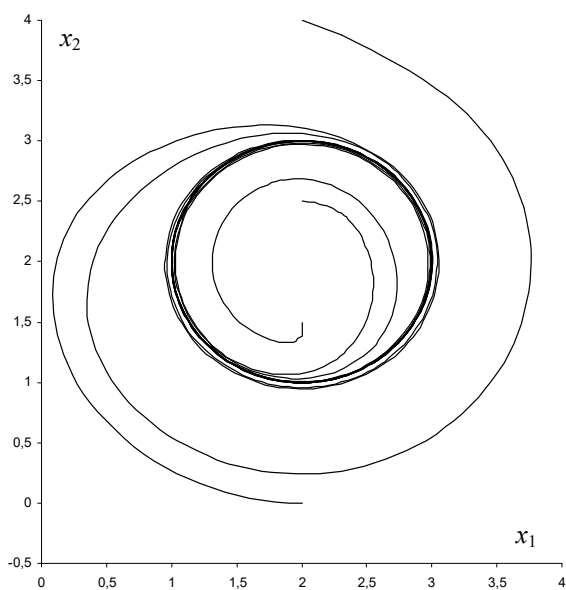


Рисунок 5.3 – Случай граничного значения управления

С помощью решения вспомогательной задачи (2.4) с параметрами: $\theta = 5$, $v = 0.2$, $L = 3$, и осуществляющим заданное движение управлением $u_f(t) \equiv -2$, $t \geq 0$, была построена обратная связь, после замыкания которой системы (5.3) движение (5.4) стало устойчивым предельным циклом. Фазовые траектории замкнутой системы при следующем наборе начальных значений: $x_0 = (2, 4)$, $x_0 = (2, 0)$, $x_0 = (2, 2.5)$, $x_0 = (2, 1.5)$, представлены на рисунке 5.2.

Эта же задача испытывалась также в случае, когда $u_f = -2$ является граничным значением в геометрических ограничениях сопровождающей задачи ($L = 2$). Результаты представлены на рисунке 5.3.

Заключение

В работе описан способ применения методов оптимального управления с привлечением современных средств вычислительной техники для решения одной из задач классической теории регулирования – задачи осуществления движений, которая более полвека назад (наряду с другими подобными задачами) послужила толчком к созданию теории оптимального управления. Построенные регуляторы способны в режиме реального времени вычислять текущие значения обратных связей, которые обеспечивают не только устойчивое осуществление движений, но и высокое качество переходных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман, М.А. Лекции по теории автоматического регулирования / М.А. Айзерман. – 2-е изд., доп. и перераб. – М.: Физматгиз, 1958. – 520 с.
2. Барбашин, Е.А. Введение в теорию устойчивости / Е.А. Барбашин. – М.: Наука, 1967. – 224 с.
3. Квасернаак, Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квасернаак, Р. Сиван. – М.: Мир, 1977. – 656 с.
4. Малкин, И.Г. Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин. – 2-е изд., испр. – М.: Наука, 1966. – 530 с.
5. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.]. – М.: Наука, 1969. – 384 с.
6. Габасов, Р. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, О.И. Костюкова // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1992. – № 4. – С. 3–19.
7. Габасов, Р. Синтез регулятора для одной линейно-квадратичной задачи оптимального управления / Р. Габасов, А.В. Лубочкин // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 9. – С. 3–14.
8. Кириллова, Ф.М. Синтез оптимального управления в линейно-квадратичной задаче с

ограничениями / Ф.М. Кириллова, А.В. Лубочкин // Доклады РАН. – 1997. – Т. 356, № 6. – С. 736–739.

9. Лубочкин, А.В. Дискретная реализация позиционного решения в линейно-квадратичной задаче с ограничениями / А.В. Лубочкин // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2003. – № 3 (18). – С. 32–37.

10. Габасов, Р. К методам стабилизации динамических систем / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, О.И. Костюкова // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1994. – № 3. – С. 67–77.

11. Габасов, Р. Стабилизация линейных динамических систем оптимальными управлениями линейно-квадратичных задач / Р. Габасов, А.В. Лубочкин // Прикладная математика и механика. – 1998. – Т. 62, Вып. 4. – С. 556–565.

12. Лубочкин, А.В. Стабилизация линейных динамических систем с помощью позиционных решений линейно-квадратичных задач с ограничениями / А.В. Лубочкин // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 4 (37). – С. 39–42.

13. Лубочкин, А.В. Решение классической задачи регулирования оптимальными управлениями линейно-квадратичных задач / А.В. Лубочкин // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 2 (3). – С. 40–46.

14. Габасов, Р. Синтез обратных связей для систем, осуществляющих заданные движения / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Е.А. Ружицкая // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 8. – С. 26–39.

15. Лубочкин, А.В. Построение оптимального (по среднеквадратичной интенсивности управления) переходного процесса в линейной системе) / А.В. Лубочкин // Конструктивные методы оптимизации. Ч. 4. Выпуклые задачи / Р. Габасов [и др.]. – Мн.: Университетское, 1987. – С. 218–222.

16. Ракецкий, В.М. Решение общей задачи выпуклого квадратичного программирования двойственным методом / В.М. Ракецкий // Программное обеспечение ЭВМ. – Мн.: Ин-т математики АН БССР, 1985. – Вып. 55. – С. 124–129.

Поступила в редакцию 20.03.19.