МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ОБОБЩЕННО РАНГОВЫЕ КОМПОЗИЦИОННЫЕ ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В.И. Мурашко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

GENERALIZED RANK COMPOSITION FORMATIONS OF FINITE GROUPS

V.I. Murashka

F. Scorina Gomel State University

В работе предложена конструкция композиционных формаций, включающая в себя в виде частных случаев формации квази-$\mathfrak{F}$-групп, c-сверхразрешимых групп и ранговые формации. Описана структура групп из введенных формаций. В качестве частных случаев получен ряд результатов различных авторов. Также для предложенных формаций исследован вопрос Л.А. Шеметкова о пересечении $\mathfrak{F}$-максимальных подгрупп и $\mathfrak{F}$-гиперцентре.

Ключевые слова: *конечная группа*, *c-сверхразрешимая группа*, *квазинильпотентная группа*, *квази-$\mathfrak{F}$-группа*, *наследственная локальная формация*, *композиционная формация*, *$\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа*, *$\mathfrak{F}$-гиперцентр*.

In this paper one construction of composition formations was introduced. This construction contains formations of quasi-$\mathfrak{F}$-groups, c-supersoluble groups and groups defined by ranks of chief factors. The structure of groups from introduced formations was described. As corollaries some results of different authors were obtained. A question of L.A. Shemetkov about the intersection of $\mathfrak{F}$-maximal subgroups and the $\mathfrak{F}$-hypercenter was investigated for these formations.

Keywords: *finite group*, *c-supersoluble group*, *quasinilpotent group*, *quasi-$\mathfrak{F}$-group*, *hereditary local formation*, *composition formation*, *$\mathfrak{F}$-maximal subgroup*, *$\mathfrak{F}$-hypercenter*.

AMS (2010): 20D25, 20F17, 20F19.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Через G, p и $\mathfrak{X}$ в данной работе обозначаются группа, простое число и класс групп соответственно.

Одним из важных направлений в современной теории групп является построение классов групп (формаций, классов Фиттинга, классов Шунка и т. д.) и изучение свойств всех групп в данном классе.

Напомним, что *формацией* называется класс групп $\mathfrak{X}$, обладающий следующими свойствами: (a) всякий гомоморфный образ $\mathfrak{X}$-группы является $\mathfrak{X}$-группой и (b) если G/M и G/N – $\mathfrak{X}$-группы, то $G/(M\cap N)\in\mathfrak{X}$.

Одним из важнейших видов формаций являются локальные формации. Напомним, что функция вида $f:\mathbb{P}\to\{\text{формации}\}$ называется *формационной функцией* и формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной* [1], если

$$\mathfrak{F}=(G\mid G/C_G(\overline{H})\in f(p) \text{ для любых } p\in\pi(\overline{H}) \text{ и главного фактора } \overline{H} \text{ группы } G)$$

для некоторой формационной функции f. В этом случае f называется *локальным экраном* формации $\mathfrak{F}$. По известной теореме Гашюца – Любизедер – Шмида, формация является локальной тогда и только тогда, когда она непуста и *насыщена*, т. е. из $G/\Phi(G)\in\mathfrak{F}$ всегда следует, что $G\in\mathfrak{F}$, где $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G. Классы всех единичных $\mathfrak{E}$, нильпотентных $\mathfrak{N}$, метанильпотентных $\mathfrak{N}^2$, сверхразрешимых $\mathfrak{U}$ и разрешимых $\mathfrak{S}$ групп являются примерами локальных формаций.

Наибольшее применение локальные формации находят в теории разрешимых групп. Отметим еще один интересный вид формаций разрешимых групп. Пусть $\overline{N}$ – главный фактор группы G. Тогда $\overline{N}=\overline{N}_1\times\ldots\times\overline{N}_n$, где $\overline{N}_i$ – изоморфные простые группы. Число $n=r(\overline{N},G)$ называется *рангом* $\overline{N}$ в G. *Ранговой функцией* R [1, VII, определение 2.3] называется отображение, ставящее в соответствие каждому простому числу p множество $R(p)$ натуральных чисел. Со всякой ранговой функцией связан класс групп

$$\mathfrak{E}(R)=(G\in\mathfrak{S}\mid \text{для любого } p\in\mathbb{P} \text{ ранг всякого главного } p\text{-фактора } G \text{ лежит в } R(p)).$$

Отметим, что $\mathfrak{E}(R)$ – формация. Хайнекен [2] и Харман [3] описали все ранговые функции R для которых формация $\mathfrak{E}(R)$ локальна. Аналогичные вопросы для формаций неполной характеристики изучались Хуппертом [4], Кохлером [5] и Харманом [3]. Хабрел и Хайнекен [6] описали все ранговые функции R, для которых $\mathfrak{E}(R)$ является формацией Фиттинга.

Функция вида $f:\mathbb{P}\cup\{0\}\to\{\text{формации}\}$ называется композиционным экраном. Напомним [7, с. 4], что формация $\mathfrak{F}$ называется *композиционной* или *Бэр-локальной*, если

$$\mathfrak{F}=(G\mid G/G_{\mathfrak{S}}\in f(0)\text{ и } G/C_G(\overline{H})\in f(p)$$
$$\text{для любого абелевого главного } p\text{-фактора } \overline{H} \text{ группы } G)$$

для некоторого композиционного экрана f. Формация является композиционной (Бэр-локальной) [1, IV, теорема 4.17] тогда и только тогда, когда она *разрешимо насыщена*, т. е. из $G/\Phi(G_{\mathfrak{S}})\in\mathfrak{F}$ всегда следует, что $G\in\mathfrak{F}$, где $G_{\mathfrak{S}}$ – разрешимый радикал группы G.

Заметим, что локальная формация является композиционной. Обратное утверждение неверно. Примером нелокальной композиционной формации служит класс $\mathfrak{N}^*$ всех квазинильпотентных групп, введенный Бендером [8].

Напомним, что главный фактор $\overline{H}$ группы G называется $\mathfrak{X}$-*центральным* в G, если $\overline{H}\rtimes G/C_G(\overline{H})\in\mathfrak{X}$ (см. [9, с. 127–128]), иначе он называется $\mathfrak{X}$-*эксцентральным*. Через $Z_{\mathfrak{X}}(G)$ обозначается $\mathfrak{X}$-*гиперцентр* группы G – наибольшая нормальная подгруппа группы G такая, что всякий её G-композиционный фактор $\mathfrak{X}$-централен в G. Если $\mathfrak{X}=\mathfrak{N}$, то $Z_{\mathfrak{N}}(G)=Z_\infty(G)$ – гиперцентр группы G. Отметим, что если $\mathfrak{F}$ – композиционная формация, то из [7, 1, теорема 2.6] следует, что

$$\mathfrak{F}=(G\mid Z_{\mathfrak{F}}(G)=G).$$

Определение композиционной формации $\mathfrak{F}$ в общем случае дает мало информации о действии $\mathfrak{F}$-группы G на ее неабелевых главных факторах. Ввиду этого, несколько семейств композиционных формаций были введены с помощью уточнения действия $\mathfrak{F}$-группы на ее неабелевых главных факторах. Например, в [10], [11] Гуо и Скиба ввели класс $\mathfrak{F}^*$ всех квази-$\mathfrak{F}$-групп для насыщенной формации $\mathfrak{F}$:

$$\mathfrak{F}^*=(G\mid \text{для любых } \mathfrak{F}\text{-эксцентрального главного фактора } \overline{H} \text{ и } x\in G,\ x \text{ индуцирует внутренний автоморфизм на } \overline{H}).$$

Если $\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{F}$ – нормально наследственная насыщенная формация, то $\mathfrak{F}^*$ – нормально наследственная разрешимо насыщенная формация по [10, теорема 2.6].

Еще одним примером нелокальной композиционной формации служит класс всех c-сверхразрешимых групп, введенный Ведерниковым в [12]. Напомним, что группа называется *c-сверхразрешимой* (*SC*-группой в терминологии Робинсона [13]), если всякий ее главный фактор – простая группа. Согласно [14], группа G называется $\mathfrak{J}c$-*сверхразрешимой*, если всякий главный $\mathfrak{J}$-фактор группы G является простой группой, где $\mathfrak{J}$ – некоторый класс простых групп. В [14] аналогичная идея была применена к некоторым другим классом групп. Произведения групп из получившихся классов изучались в [14], [15]. В работе [16] был введен класс $\mathfrak{F}_{ca}$ всех ca-$\mathfrak{F}$-групп:

$$\mathfrak{F}_{ca}=(G\mid \text{абелевые главные факторы } G\ \mathfrak{F}\text{-центральны, а остальные главные факторы – простые группы}).$$

Класс $\mathfrak{F}_{ca}$ изучался в работах [16], [17], где $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, в частности, этот класс – композиционная формация.

Используются стандартные обозначения и терминология из [1], [7]. Напомним, что через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G для формации $\mathfrak{F}$; $\pi(G)$ – множество простых делителей $|G|$; $\pi(\mathfrak{X})=\bigcup_{G\in\mathfrak{X}}\pi(G)$;

$$\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}=(G\mid G/O_p(G)\in\mathfrak{F})$$

является формацией для формации $\mathfrak{F}$; $\tilde{\mathrm{F}}(G)$ определяется из $\tilde{\mathrm{F}}(G)/\Phi(G)=Soc(G/\Phi(G))$; $N\wr S_n$ – естественное сплетение группы N с симметрической группой S_n степени n. Через $E\mathfrak{F}$ будем обозначать класс групп, все композиционные факторы которых принадлежат $\mathfrak{F}$.

1 Конструкция обобщенно ранговых формаций

В данной работе мы обобщаем конструкции квази-$\mathfrak{F}$-групп, ca-$\mathfrak{F}$-групп, $\mathfrak{J}c$-сверхразрешимых групп и классов групп, определяемых ранговыми функциями, в смысле следующего определения.

***Определение* 1.1.** (1) Обобщенная ранговая функция $\mathcal{R}$ – отображение, определенное на прямых произведениях изоморфных простых групп следующим образом:

(a) $\mathcal{R}$ ставит в соответствие каждой простой группе S пару $\mathcal{R}(S)=(A_{\mathcal{R}}(S),B_{\mathcal{R}}(S))$ возможно пустых непересекающихся множеств $A_{\mathcal{R}}(S)$ и $B_{\mathcal{R}}(S)$ натуральных чисел.

(b) Если N – прямое произведение простых изоморфных S групп, то $\mathcal{R}(N)=\mathcal{R}(S)$.

(2) Пусть $\overline{N}$ – главный фактор G. Будем говорить, что *обобщенный ранг* $\overline{N}$ в G лежит в $\mathcal{R}(\overline{N})$ (кратко $gr(\overline{N},G)\in\mathcal{R}(\overline{N})$), если $r(\overline{N},G)\in A_{\mathcal{R}}(\overline{N})$ или $r(\overline{N},G)\in B_{\mathcal{R}}(\overline{N})$ и, если $x\in G$ фиксирует композиционный фактор $\overline{H}/\overline{K}$ в $\overline{N}$ (т. е.

$\bar{H}^x = \bar{H}$ и $\bar{K}^x = \bar{K}$), то x индуцирует внутренний автоморфизм на нем.

(3) С каждыми обобщенно ранговой функцией $\mathcal{R}$ и классом групп $\mathfrak{X}$ мы связываем класс групп

$$\mathfrak{X}(\mathcal{R}) = (G \mid \bar{H} \notin \mathfrak{X} \text{ и}$$
$$gr(\bar{H}, G) \in \mathcal{R}(\bar{H}) \text{ для любого } \mathfrak{X}\text{-эксцентраль-}$$
$$\text{ного главного фактора } \bar{H} \text{ группы } G).$$

***Пример* 1.1.** Многие из отмеченных выше формаций являются частными случаями этой конструкции:

1. Пусть $\mathfrak{E} = (1)$. Предположим, что $\mathcal{R}(H) = (\{1\}, \varnothing)$, если H абелева и $\mathcal{R}(H) = (\varnothing, \varnothing)$ в противном случае. Тогда $\mathfrak{E}(\mathcal{R}) = \mathfrak{U}$.

2. Если $\mathcal{R}(H) \equiv (\{1\}, \varnothing)$, то $\mathfrak{E}(\mathcal{R})$ – класс $\mathfrak{U}_c$ всех c-сверхразрешимых групп.

3. Пусть $\mathfrak{J}$ – класс простых групп. Если $\mathcal{R}(H) = (\{1\}, \varnothing)$ для $H \in \mathfrak{J}$ и $\mathcal{R}(H) = (\mathbb{N}, \varnothing)$ в противном случае, то $\mathfrak{E}(\mathcal{R})$ – класс всех $\mathfrak{J}c$-сверхразрешимых групп.

4. Предположим, что $\mathcal{R}(H) = (A_{\mathcal{R}}(H), \varnothing)$, если H абелева и $\mathcal{R}(H) = (\varnothing, \varnothing)$ в противном случае. Тогда $\mathcal{R}$ – ранговая функция.

5. Пусть $\mathcal{R}(H) = (\varnothing, \{1\})$, если H абелева и $\mathcal{R}(H) = (\varnothing, \varnothing)$ в противном случае. Тогда $\mathfrak{E}(\mathcal{R}) = \mathfrak{N}$.

6. Если $\mathcal{R}(H) \equiv (\varnothing, \{1\})$, то $\mathfrak{E}(\mathcal{R}) = \mathfrak{N}^*$.

7. Предположим, что $\mathcal{R}(H) = (\varnothing, \{1\})$, если H абелева и $\mathcal{R}(H) = (\{1\}, \varnothing)$ в противном случае. Тогда $\mathfrak{E}(\mathcal{R}) = \mathfrak{N}_{ca}$.

8. Пусть $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ – нормально наследственная насыщенная формация. Если $\mathcal{R}(H) \equiv (\varnothing, \{1\})$, то $\mathfrak{F}(\mathcal{R}) = \mathfrak{F}^*$ (см. доказательства следствия 1.1.3).

9. Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ – нормально наследственная насыщенная формация, $\mathcal{R}(H) = (\varnothing, \varnothing)$ для абелевых $H \notin \mathfrak{F}$ и $\mathcal{R}(H) = (\{1\}, \varnothing)$ для неабелевых H. Тогда $\mathfrak{F}(\mathcal{R}) = \mathfrak{F}_{ca}$.

Напомним, что всякая непустая композиционная формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный композиционный экран F такой, что

$$F(p) = \mathfrak{N}_p F(p) \subseteq \mathfrak{F}$$

для всех простых p и $F(0) = \mathfrak{F}$ [7, 1, теорема 1.6]. В этом случае F называется *максимальным внутренним композиционным экраном* $\mathfrak{F}$.

Будем называть обобщенную ранговую функцию $\mathcal{R}$ (соответственно, *сильно*) *наследственной*, если для любой простой группы S выполняется:

(a) из $a \in A_{\mathcal{R}}(S)$ всегда следует, что $b \in A_{\mathcal{R}}(S)$ для любого натурального $b \mid a$ (соответственно, $b \le a$);

(b) из $a \in B_{\mathcal{R}}(S)$ всегда следует, что $b \in A_{\mathcal{R}}(S) \cup B_{\mathcal{R}}(S)$ (соответственно, $b \in B_{\mathcal{R}}(S)$) для любого натурального $b \mid a$ (соответственно, $b \le a$).

***Теорема* 1.1.** *Пусть $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ – композиционная формация с максимальным внутренним композиционным экраном F и $\mathcal{R}$ – обобщенная ранговая функция. Тогда*

(1) *$\mathfrak{F}(\mathcal{R})$ – композиционная формация с максимальным внутренним композиционным экраном $F_{\mathcal{R}}$ таким, что $F_{\mathcal{R}}(0) = \mathfrak{F}(\mathcal{R})$ и $F_{\mathcal{R}}(p) = F(p)$ для всех $p \in \mathbb{P}$.*

(2) *Если $\mathfrak{F}$ нормально наследственна и $\mathcal{R}$ – наследственная обобщенная ранговая функция, то $\mathfrak{F}(\mathcal{R})$ также нормально наследственна.*

***Следствие* 1.1.1** [18, теорема 1]. *Класс $\mathfrak{U}_c$ – композиционная формация с максимальным внутренним композиционным экраном h таким, что $h(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1)$ для любого простого p и $h(0) = \mathfrak{U}_c$.*

В работе [19] был введен класс $w\mathfrak{U}$ всех расширенно сверхразрешимых групп. Данный класс является наследственной насыщенной формацией разрешимых групп. Напомним [20], что группа называется *расширенно c-сверхразрешимой*, если её абелевые факторы $w\mathfrak{U}$-центральны, а оставшиеся – простые группы.

***Следствие* 1.1.2** [20, теорема A]. *Класс $\mathfrak{U}_{cw}$ всех расширенно c-сверхразрешимых групп – нормально наследственная композиционная формация с максимальным внутренним композиционным экраном h, таким, что*

$$h(p) = \mathfrak{N}_p (G \mid G \in w\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}_p \mathcal{A}(p-1))$$

для любого простого p и $h(0) = \mathfrak{U}_{cw}$.

***Следствие* 1.1.3** [10, теорема 2.6]. *Для любой насыщенной формации $\mathfrak{F}$, содержащей все нильпотентные группы, с максимальным внутренним локальным экраном F, формация $\mathfrak{F}^*$ является композиционной с максимальным внутренним композиционным экраном F^*, где $F^*(p) = F(p)$ для любого простого p и $F^*(0) = \mathfrak{F}^*$. Более того, если формация $\mathfrak{F}$ нормально наследственна, то $\mathfrak{F}^*$ также нормально наследствена.*

При доказательстве теоремы 1.1 нам понадобятся следующие леммы:

***Лемма* 1.1.** *Пусть H/K и M/N – G-изоморфные главные факторы группы G.*

(a) *Тогда они имеют одинаковый обобщенный главный ранг.*

(b) [7, 1, лемма 1.4]

$$H/K \rtimes G/C_G(H/K) \simeq M/N \rtimes G/C_G(M/N).$$

Доказательство. Пусть $\alpha : H/K \to M/N$ – G-изоморфизм. Так как H/K и M/N –

изоморфные группы, то они имеют одинаковый ранг. Предположим, что $x \in G$ фиксирует композиционный фактор A/B группы H/K и индуцирует внутренний автоморфизм aB на нем. Заметим, что $\alpha(A/B)$ – композиционный фактор M/N. Из $\alpha(A/B)^x = \alpha(A/B^x) = \alpha(A/B)$ следует, что x фиксирует $\alpha(A/B)$ и достаточно легко проверить, что x индуцирует внутренний автоморфизм $\alpha(aB)$ на нем. Так как α^{-1} также является G-изоморфизмом, можно сделать вывод, что H/K и M/N имеют одинаковые обобщенные ранги. □

***Лемма* 1.2** [7, 1, предложение 1.15]. *Пусть $\bar{H}$ – главный фактор группы G.*

(1) *Если $\mathfrak{F}$ – композиционная формация и F – её максимальный внутренний композиционный экран, то $\bar{H}$ $\mathfrak{F}$-централен тогда и только тогда, когда $G/C_G(\bar{H}) \in F(p)$ для всех $p \in \pi(\bar{H})$, в случае абелевого $\bar{H}$, и $G/C_G(\bar{H}) \in \mathfrak{F}$, когда $\bar{H}$ неабелевый.*

(2) *Если $\mathfrak{F}$ – локальная формация и F – её максимальный внутренний локальный экран, то $\bar{H}$ $\mathfrak{F}$-централен тогда и только тогда, когда $G/C_G(\bar{H}) \in F(p)$ для всех $p \in \pi(\bar{H})$.*

Следующая лемма следует из [7, 1, теорема 2.6].

***Лемма* 1.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – композиционная формация. Тогда $\mathfrak{F} = (G \mid G = Z_{\mathfrak{F}}(G))$.*

Напомним, что через $C^p(G)$ обозначается пересечение всех централизаторов абелевых главных p-факторов G ($C^p(G) = G$ когда G не имеет таких факторов). Пусть f – композиционный экран композиционной формации $\mathfrak{F}$. Известно, что $\mathfrak{F} = (G \mid G/G_{\mathfrak{S}} \in f(0)$ и $G/C^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \pi(G)$ таких, что G имеет абелевый главный p-фактор).

***Лемма* 1.4** [21, X, 13.16 (*a*)]. *Предположим, что $G = G_1 \times \ldots \times G_n$, где всякая G_i – простая неабелевая подгруппа группы G и $G_i \neq G_j$ для $i \neq j$. Тогда всякая субнормальная подгруппа H группы G – прямое произведение некоторых G_i.*

Следующая лемма напрямую вытекает из предыдущей.

***Лемма* 1.5.** *Пусть нормальная подгруппа N группы G является прямым произведением изоморфных простых неабелевых групп. Тогда N – прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы G.*

Доказательство теоремы 1.1. (1) Из (*b*) и (*c*) теорем об изоморфизмах [1] и леммы 1.1 следует, что $\mathfrak{X}(\mathcal{R})$ – формация для любого класса групп $\mathfrak{X}$. Тогда $\mathfrak{F}(\mathcal{R})$ – формация. Пусть $\mathfrak{H} = CLF(F_{\mathcal{R}})$.

Предположим, что $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}(\mathcal{R}) \neq \varnothing$. Выберем группу G минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}(\mathcal{R})$. Так как $\mathfrak{F}(\mathcal{R})$ – формация, G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $G/N \in \mathfrak{F}(\mathcal{R})$.

Предположим, что N абелева. Тогда она является p-группой. Так как N $\mathfrak{H}$-центральна в G по лемме 1.3, $G/C_G(N) \in F_{\mathcal{R}}(p)$ по лемме 1.2. Из $F_{\mathcal{R}}(p) = F(p)$ и леммы 1.2 следует, что N – $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор G. Тогда $G \in \mathfrak{F}(\mathcal{R})$, противоречие.

Значит, N неабелева. Заметим, что $G_{\mathfrak{S}} \leq C_G(N)$ по [7, 1, предложение 1.5]. Тогда

$$G \simeq G/C_G(N) \in F_{\mathcal{R}}(0) = \mathfrak{F}(\mathcal{R}),$$

противоречие. Значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{R})$.

Предположим, что $\mathfrak{F}(\mathcal{R}) \setminus \mathfrak{H} \neq \varnothing$. Выберем группу G минимального порядка из $\mathfrak{F}(\mathcal{R}) \setminus \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H}$ – формация, G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $G/N \in \mathfrak{H}$.

Если N абелева, то $G/C_G(N) \in F(p)$ для некоторого p по леммам 1.2 и 1.3. Из $F_{\mathcal{R}}(p) = F(p)$ и леммы 1.2 следует, что N $\mathfrak{H}$-центральна в G. Итак, $G \in \mathfrak{H}$, противоречие.

Значит, N неабелева. Следовательно, $G_{\mathfrak{S}} = 1$. Тогда $G/G_{\mathfrak{S}} \simeq G \in \mathfrak{F}(\mathcal{R}) = F_{\mathcal{R}}(0)$. Заметим, что $N \leq C^p(G)$ для всех простых p. Поэтому $C^p(G)/N = C^p(G/N)$. Из $G/N \in \mathfrak{H}$ следует, что $G/C^p(G) \simeq (G/N)/C^p(G/N) \in F_{\mathcal{R}}(p)$ для любого p такого, что G имеет абелевый главный p-фактор. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$, противоречие. Значит, $\mathfrak{F}(\mathcal{R}) \subseteq \mathfrak{H}$. Итак, $\mathfrak{F}(\mathcal{R}) = \mathfrak{H}$.

(2) Пусть F – максимальный композиционный экран формации $\mathfrak{F}$, G – $\mathfrak{F}$-группа, $1 = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq N_n = N \trianglelefteq G$ – часть главного ряда группы G, находящаяся ниже N и H/K – главный фактор N такой, что $N_{i-1} \leq K \leq H \leq N_i$ для некоторого i.

Если $N_i/N_{i-1} \notin \mathfrak{F}$, то эта секция неабелева. Согласно лемме 1.5, N_i/N_{i-1} – прямое произведение минимальных нормальных подгрупп N/N_{i-1}. Пусть группа L/N_{i-1} – одна из них и L_1/N_{i-1} – её простой прямой множитель. Заметим, что $r(N_i/N_{i-1}, G) = |G : N_G(L_1/N_{i-1})|$,

$$N_G(L_1/N_{i-1}) \cap N = N_N(L_1/N_{i-1})$$

и $|G : N_N(L_1/N_{i-1})|$ – делитель $|G : N_G(L_1/N_{i-1})|$ по [22, §1, лемма 1]. Значит, $r(L/N_{i-1}, N)$ делит $r(N_i/N_{i-1}, G)$ и любой композиционный фактор группы L/N_{i-1} является и композиционным фактором N_i/N_{i-1}. Так как $\mathcal{R}$ – наследственная обобщенная ранговая функция,

$$gr(L/N_{i-1}, N) \in \mathcal{R}(L/N_{i-1})$$

для любого главного фактора L/N_{i-1} группы N между N_{i-1} и N_i.

Если фактор $N_i/N_{i-1} \in \mathfrak{F}$, то он $\mathfrak{F}$-централен в G. Заметим, что $H/K \in \mathfrak{F}$.

Предположим, что N_i/N_{i-1} абелев. Тогда $G/C_G(N_i/N_{i-1}) \in F(p)$ для некоторого p по лемме 1.2. Заметим, что $F(p)$ – нормально наследственная формация по [1, IV, предложение 3.16]. Так как

$$NC_G(N_i/N_{i-1})/C_G(N_i/N_{i-1}) \trianglelefteq G/C_G(N_i/N_{i-1}),$$

понятно, что

$$NC_G(N_i/N_{i-1})/C_G(N_i/N_{i-1}) \simeq$$
$$\simeq N/C_N(N_i/N_{i-1}) \in F(p).$$

Из $C_N(N_i/N_{i-1}) \le C_N(H/K)$ следует, что $N/C_N(H/K)$ – фактор группа группы $N/C_N(N_i/N_{i-1})$. Значит, $N/C_N(H/K) \in F(p)$. Следовательно, H/K – $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор N по лемме 1.2.

Предположим, что N_i/N_{i-1} неабелева. Тогда $G/C_G(N_i/N_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ по лемме 1.2. Значит, $NC_G(N_i/N_{i-1})/C_G(N_i/N_{i-1}) \in \mathfrak{F}$. Аналогично предыдущему абзацу, $N/C_N(H/K) \in \mathfrak{F}$. Тогда H/K – $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор N по лемме 1.2.

Таким образом, всякий главный $\mathfrak{F}$-фактор группы N $\mathfrak{F}$-централен и $gr(\bar{H}, N) \in \mathcal{R}(\bar{H})$ для любого другого главного фактора $\bar{H}$ группы N по теореме Жордана – Гёльдера. Итак, $N \in \mathfrak{F}(\mathcal{R})$. □

Доказательства следствий 1.1.1, 1.1.2 *и* 1.1.3. Напомним, что всякая локальная формация является композиционной. Известно, что если F – максимальный внутренний локальный экран локальной формации $\mathfrak{F}$, то D – максимальный внутренний композиционный экран $\mathfrak{F}$, где $D(0) = \mathfrak{F}$ и $F(p) = D(p)$ для всех простых p.

Пусть $\mathcal{R}(H) \equiv (\{1\}, \varnothing)$. Тогда $\mathcal{R}$ наследствена H. Напомним, что классы всех сверхразрешимых и расширенно сверхразрешимых групп являются наследственными локальными формациями с максимальными внутренними локальными экранами $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$ и

$$D(p) = \mathfrak{N}_p(G \mid G \in w\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}_p\mathcal{A}(p-1))$$

[20, лемма 3.2] для любого простого p соответственно. Заметим, что $\mathfrak{U}_c = \mathfrak{U}(\mathcal{R})$ and $\mathfrak{U}_{cw} = w\mathfrak{U}(\mathcal{R})$. Ввиду этого, следствия 1.1.1 и 1.1.2 напрямую вытекают из теоремы 1.1.

Пусть $\mathcal{R}(H) \equiv (\varnothing, \{1\})$ и $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная формация. Отметим, что $\mathcal{R}$ наследствена H. Пусть $\bar{H} \in \mathfrak{F}$ – $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор $\mathfrak{F}^*$-группы G. Заметим, что $r(\bar{H}, G) = 1$ и $\bar{H} \rtimes G/C_G(\bar{H})$ – фактор-группа группы $\bar{H} \times \bar{H} \in \mathfrak{F}$. Итак, $\bar{H}$ $\mathfrak{F}$-централен в G, противоречие. Значит, $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}(\mathcal{R})$. Ввиду вышеизложенного, следствие 1.1.3 напрямую вытекает из теоремы 1.1. □

2 Структура $\mathfrak{F}(\mathcal{R})$-группы

Целью этого раздела является получение характеризаций $\mathfrak{F}(\mathcal{R})$-групп.

***Определение* 2.1.** Пусть $Z(G, \mathcal{R}, \mathfrak{F}, n)$ – наибольшая нормальная подгруппа группы G такая, что $\bar{H} \notin \mathfrak{F}$, $r(\bar{H}, G) > n$ и $gr(\bar{H}, G) \in \mathcal{R}(\bar{H})$ для любого её G-композиционного $\mathfrak{F}$-эксцентрального в G фактора $\bar{H}$.

Пусть C – множество и $\mathcal{R}$ – обобщенная ранговая функция. Будем говорить, что $\mathcal{R}(\bar{H}) \subseteq C$, если $A_{\mathcal{R}}(\bar{H}) \cup B_{\mathcal{R}}(\bar{H}) \subseteq C$. Под $\mathcal{R}(\bar{H}) \cap C$ будем подразумевать

$$(A_{\mathcal{R}}(\bar{H}) \cap C, B_{\mathcal{R}}(\bar{H}) \cap C).$$

***Замечание* 2.1.** (1) Пусть N и M – нормальные подгруппы группы G. Согласно п. (b) теорем об изоморфизмах [1] всякий G-композиционный фактор NM G-изоморфен некоторому G-композиционному фактору группы N или группы M. Следовательно, $Z(G, \mathcal{R}, \mathfrak{F}, n)$ существует в любой группе по лемме 1.1.

(2) Очевидно, что $G \in \mathfrak{F}(\mathcal{R})$ тогда и только тогда, когда $G = Z(G, \mathcal{R}, \mathfrak{F}, 0)$.

(3) Если $\mathcal{R}(S) \subseteq [0,1]$ для любой простой группы S, то $Z(G, \mathcal{R}, \mathfrak{F}, n) = Z_{\mathfrak{F}}(G)$ для $n > 1$.

***Теорема* 2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – композиционная формация, содержащая все нильпотентные группы, которая наряду со всякой своей группой содержит и все ее композиционные факторы. Если $\mathcal{R}$ – обобщенная ранговая функция, то следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *G – $\mathfrak{F}(\mathcal{R})$-группа.*

(2) *Если $Z = Z(G, \mathcal{R}, \mathfrak{F}, 4)$, то*

$$gr(N/Z, G) \in \mathcal{R}(N/Z) \cap [1, 4]$$

для любой минимальной нормальной подгруппы N/Z группы G/Z и $(G/Z)/Soc(G/Z)$ – разрешимая $\mathfrak{F}$-группа.

(3) *Верны следующие утверждения*:

(a) $G^{\mathfrak{F}} = G^{E\mathfrak{F}}$.

(b) *Если $N \trianglelefteq G$ и $N \le G^{\mathfrak{F}}$, то*

$$(G^{\mathfrak{F}}/N)_{E\mathfrak{F}} = Z(G^{\mathfrak{F}}/N).$$

(*c*) *Пусть n – наименьшее число, такое, что найдётся простая не-$\mathfrak{F}$-секция в* S_{n+1} *и* $T = G^{\mathfrak{F}} \cap Z(G,\mathcal{R},\mathfrak{F},n)$. *Тогда* $G^{\mathfrak{F}}/T \le Soc(G/T)$ *и* $N/T \notin \mathfrak{F}$, $r(N/T,G) \le n$ *и*

$$gr(N/T,G) \in \mathcal{R}(N/T)$$

для любой минимальной нормальной подгруппы N/T *группы* G/T *из* $G^{\mathfrak{F}}/T$.

Напомним [7, с. 13], что группа называется *полупростой*, если она или единична, или является прямым произведением простых неабелевых групп.

***Следствие* 2.1.1** [21, X, теорема 13.6]. *Группа G квазинильпотентна тогда и только тогда, когда* $G/Z_{\infty}(G)$ *полупроста*.

***Следствие* 2.1.2** [10, теорема 2.8]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– нормально наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Группа G является квази-*$\mathfrak{F}$*-группой тогда и только тогда, когда* $G/Z_{\mathfrak{F}}(G)$ *полупроста.*

***Следствие* 2.1.3** [17, теорема A]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация разрешимых групп, содержащая все нильпотентные группы. Тогда и только тогда* $G \in \mathfrak{F}_{ca}$, *когда* $G^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{S}}$, $Z(G^{\mathfrak{F}}) \le Z_{\mathfrak{F}}(G)$ *и* $G^{\mathfrak{F}}/Z(G^{\mathfrak{F}})$ *– прямое произведение G-допустимых простых неабелевых групп.*

***Следствие* 2.1.4** [13, предложение 2.4]. *Группа G является c-сверхразрешимой тогда и только тогда, когда найдётся совершенная нормальная подгруппа D такая, что* G/D *сверхразрешима,* $D/Z(D)$ *– прямое произведение G-допустимых простых неабелевых групп и* $Z(D)$ *сверхразрешимо вложена в G.*

***Следствие* 2.1.5** [20, теорема B]. *Группа G является расширенно c-сверхразрешимой тогда и только тогда, когда*

$$G^{w\mathfrak{U}} = G^{\mathfrak{S}},\ Z(G^{w\mathfrak{U}}) \le Z_{w\mathfrak{U}}(G)$$

и $G^{w\mathfrak{U}}/Z(G^{w\mathfrak{U}})$ *– прямое произведение G-допустимых простых неабелевых групп.*

3 О пересечении $\mathfrak{F}(\mathcal{R})$-максимальных подгрупп

Напомним [1, с. 288], что подгруппа *U* группы *G* называется $\mathfrak{X}$*-максимальной* в *G*, если (*a*) $U \in \mathfrak{X}$, и (*b*) из $U \le V \le G$ и $V \in \mathfrak{X}$ следует, что $U = V$. Пересечение всех $\mathfrak{X}$-максимальных подгрупп группы *G* обозначается через $\mathrm{Int}_{\mathfrak{X}}(G)$.

Заметим, что пересечение максимальных абелевых подгрупп группы *G* совпадает с центром *G*. Согласно Бэру [22], пересечение максимальных нильпотентных подгрупп *G* совпадает с гиперцентром *G*. В [23, пример 5.17] показано, что пересечение максимальных сверхразрешимых подгрупп может не совпадать со сверхразрешимым гиперцентром. В 1995 году на Гомельском алгебраическом семинаре Л.А. Шеметков задал вопрос: «Для каких нормально наследственных разрешимо насыщенных формаций $\mathfrak{F}$ равенство $\mathrm{Int}_{\mathfrak{F}}(G) = Z_{\mathfrak{F}}(G)$ верно для любой группы *G*»?

Отвечая на вопрос Л.А. Шеметкова А.Н. Скиба [23] (в разрешимом случае Дж. Бейдлеман и Г. Хайнекен [24]) описал все наследственные насыщенные формации $\mathfrak{F}$, для которых равенство $\mathrm{Int}_{\mathfrak{F}}(G) = Z_{\mathfrak{F}}(G)$ верно для любой группы *G*. Автор исследовал этот вопрос для формаций квази-$\mathfrak{F}$-групп [25]. В этом разделе этот вопрос будет исследован для $\mathfrak{F}(\mathcal{R})$-групп.

***Теорема* 3.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, m – натуральное число, такое, что* $\mathfrak{G}_{\{q\in\mathbb{P} \mid q \le m\}} \subseteq \mathfrak{F}$, $\mathcal{R}$ *– сильно наследственная обобщенная ранговая функция, такая, что* $\mathcal{R}(N) \subseteq [0,m]$ *для любой простой группы N. Следующие условия эквивалентны*:

(1) $Z_{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{Int}_{\mathfrak{F}}(G)$ *верно для любой группы G и*

$$\bigcup_{n=1}^{m} (\mathrm{Out}(G) \wr S_n \mid G \notin \mathfrak{F} \text{ – простая группа и } n \in A_{\mathcal{R}}(G)) \subseteq \mathfrak{F}.$$

(2) $Z_{\mathfrak{F}(\mathcal{R})}(G) = \mathrm{Int}_{\mathfrak{F}(\mathcal{R})}(G)$ *верно для любой группы G.*

***Следствие* 3.1.1** [25, теорема 1]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы. Тогда и только тогда* $\mathrm{Int}_{\mathfrak{F}}(G) = Z_{\mathfrak{F}}(G)$ *верно для любой группы G, когда* $\mathrm{Int}_{\mathfrak{F}^*}(G) = Z_{\mathfrak{F}^*}(G)$ *верно для любой группы G.*

***Следствие* 3.1.2.** *Пусть* $\mathcal{R}$ *– сильно наследственная обобщенная ранговая функция. Тогда и только тогда* $Z_{\mathfrak{N}(R)}(G) = \mathrm{Int}_{\mathfrak{N}(\mathcal{R})}(G)$ *верно для любой группы G, когда для любой простой неабелевой группы N выполняется*:

(1) $\mathcal{R}(N) \subseteq [0,2]$;

(2) *если* $1 \in A_{\mathcal{R}}(N)$, *то* $\mathrm{Out}(N)$ *нильпотентна*;

(3) *если* $2 \in A_{\mathcal{R}}(N)$, *то* $\mathrm{Out}(N)$ *является 2-группой*.

***Пример* 3.1.** Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – классы групп, абелевые главные факторы которых центральны, а неабелевые – произвольны и прямые произведения не более 2 знакопеременных групп соответственно. Тогда равенства $Z_{\mathfrak{N}^*}(G) = \mathrm{Int}_{\mathfrak{N}^*}(G)$ и $Z_{\mathfrak{F}_2}(G) = \mathrm{Int}_{\mathfrak{F}_2}(G)$ верны для любой группы *G* и найдутся группы G_1 и G_2 такие, что

$$Z_{\mathfrak{N}_{ca}}(G_1) \ne \mathrm{Int}_{\mathfrak{N}_{ca}}(G_1) \text{ и } Z_{\mathfrak{F}_1}(G_2) \ne \mathrm{Int}_{\mathfrak{F}_1}(G_2).$$

Важно отметить, что если

$$Z_{\mathfrak{F}(\mathcal{R})}(G) = \mathrm{Int}_{\mathfrak{F}(\mathcal{R})}(G)$$

верно для любой группы *G*, то $\mathcal{R}$ ограничена:

***Теорема* 3.2.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, и* $\mathcal{R}$ *– сильно наследственная обобщенная ранговая функция.*

(1) *Предположим, что*

$$Z_{\mathfrak{F}(\mathcal{R})}(G) = \mathrm{Int}_{\mathfrak{F}(\mathcal{R})}(G)$$

верно для любой группы G. *Пусть*

$$C_1 = \min_{G\in\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \text{ и } F(G)=\tilde{F}(G)} \max\{|M|-1 \mid M - \text{максимальная подгруппа } G\}.$$

Тогда $\mathcal{R}(S)\subseteq[0,C_1]$ *для любой простой группы* $S\notin\mathfrak{F}$.

(2) *Пусть*

$$C_2 = \max\{m\in\mathbb{N} \mid \mathfrak{G}_{\{q\in\mathbb{P}|q\le m\}} \subseteq \mathfrak{F}\}.$$

Если $\mathcal{R}(S)\subseteq[0,C_2]$ *для любой простой группы* $S\notin\mathfrak{F}$, *то* $gr(\bar{H},G)\in\mathcal{R}(\bar{H})$ *для любого G-композиционного фактора* $\bar{H}\notin\mathfrak{F}$ *ниже* $\mathrm{Int}_{\mathfrak{F}(\mathcal{R})}(G)$.

Автор выражает признательность доктору физико-математических наук А.Ф. Васильеву за полезные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

2. *Heineken*, *H.* Group classes defined by chief factor ranks / H. Heineken // Boll. Un. Mat. Ital. B. – 1979. – Vol. 16. – P. 754–764.

3. *Harman*, *D.* Characterizations of some classes of finite soluble groups. Ph. D. thesis, University of Warwick, 1981.

4. *Huppert*, *B.* Zur Gaschiitzschen Theorie der Formationen / B. Huppert // Math. Ann. – 1966. – Vol. 164. – P. 133–141.

5. *Kohler*, *J.* Finite groups with all maximal subgroups of prime or prime square index / J. Kohler // Canad. J. Math. – 1964. – Vol. 16. – P. 435–442.

6. *Haberl*, *K.L.* Fitting classes defined by chief factor ranks / K.L. Haberl, H. Heineken // J. London Math. Soc. – 1984. – Vol. 29. – P. 34–40.

7. *Guo*, *W.* Structure theory for canonical classes of finite groups / W. Guo. – Heidelberg – New-York – Dordrecht – London: Springer, 2015. – 359 p.

8. *Bender*, *H.* On groups with abelian Sylow 2-subgroups / H. Bender // Math. Z. – 1970. – Bd. 117. – P. 164–176.

9. *Шеметков*, *Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 256 с.

10. *Guo*, *W.* On finite quasi-$\mathfrak{F}$-groups / W. Guo, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 470–481.

11. *Guo*, *W.* On some classes of finite quasi-$\mathfrak{F}$-groups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2009. – Vol. 12. – P. 407–417.

12. *Ведерников*, *В.А.* О некоторых классах конечных групп / В.А. Ведерников // ДАН БССР. – 1988. – Т. 32, № 10. – С. 872–875.

13. *Robinson*, *D.J.S.* The structure of finite groups in whitch permutability is a transitive relation / D.J.S. Robinson // J. Austral. Math. Soc. – 2001. – Vol. 70. – P. 143–159.

14. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах с заданным нормальным строением / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, Е.Н. Мысловец // Сиб. электрон. матем. изв. – 2016. – Т. 13. – С. 897–910.

15. *Мысловец*, *Е.Н.* J-конструкции композиционных формаций и произведения конечных групп / Е.Н. Мысловец // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 4 (29). – С. 68–73.

16. *Мысловец*, *Е.Н.* О конечных ca-F-группах / Е.Н. Мысловец // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (19). – С. 64–68.

17. *Мысловец*, *Е.Н.* Конечные обобщенно *c*-сверхразрешимые группы и их взаимно перестановочные произведения / Е.Н. Мысловец, А.Ф. Васильев // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 45–53.

18. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А.Ф. Васильеа, Т.И. Васильева // Изв. вузов. Матем. – 1997. – № 11. – С. 10–14.

19. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

20. *Васильев*, *А.Ф.* Конечные расширенно *c*-сверхразрешимые группы и их взаимно перестановочные произведения / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, Е.Н. Мысловец // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57, № 3. – С. 603–616.

21. *Huppert*, *B.* Finite groups III / B. Huppert, N. Blacburn. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1982. – 454 p.

22. *Baer*, *R.* Group elements of prime power index / R. Baer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – Vol. 75. – P. 20–47.

23. *Skiba*, *A.N.* On the $\mathfrak{F}$-hypercentre and the intersection of all $\mathfrak{F}$-maximal subgroups of a finite group / A.N. Skiba // J. Pure Appl. Algebra. – 2012. – Vol. 216. – P. 789–799.

24. *Beidleman*, *J.C.* A note on intersections of maximal $\mathfrak{F}$-subgroups / J.C. Beidleman, H. Heineken // J. Algebra. – 2011. – Vol. 333. – P. 120–127.

25. *Murashka*, *V.I.* On the $\mathfrak{F}$-hypercenter and the intersection of $\mathfrak{F}$-maximal subgroups of a finite group / V.I. Murashka // J. Group. Theory. – 2018. – Vol. 21, № 3. – P. 463–473.

Поступила в редакцию 30.04.19.