МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.52+517.538.53

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА – ПАДЕ ПЕРВОГО РОДА

А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко, А.А. Драпеза

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF TYPE I HERMITE – PADÉ POLYNOMIALS

A.P. Starovoitov, N.V. Ryabchenko, A.A. Drapeza

F. Scorina Gomel State University

В работе введены новые понятия: вполненормальный индекс и вполнесовершенная система функций. С помощью этих понятий сформулирован и доказан критерий единственности, получены явные детерминантные представления многочленов Эрмита – Паде 1-го рода для произвольной системы степенных рядов. Полученные результаты дополняют и обобщают хорошо известные результаты в теории аппроксимаций Эрмита – Паде.

Ключевые слова*: многочлены Эрмита – Паде, нормальный индекс, совершенная система, определитель Адамара, определитель Ганкеля.*

New concepts are introduced in the work.They are quite normal index and a quite perfect system of functions. Using these concepts, a uniqueness criterion was formulated and proved, explicit determinant representations of type I Hermite – Padé polynomials for an arbitrary system of power series were obtained. The results obtained complement and generalize the well-known result in the theory of Hermite – Padé approximations.

Keywords*: Hermite-Pad'e polynomials, normal index, perfect system, Hadamard determinant, Hankel determinant.*

1 Постановка задачи

Пусть $f=(f_1,f_2,...,f_k)$ – набор k степенных рядов

$$f_j(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f_i^j}{z^{i+1}},\ j=1,2,...,k \qquad (1.1)$$

с комплексными коэффициентами. Множество k-мерных мультииндексов (индексов), т. е. упорядоченных k натуральных чисел $n=(n_1,n_2,...,n_k)$, обозначим $\mathbb{N}^k$. Порядок индекса $n=(n_1,n_2,...,n_k)\in\mathbb{N}^k$ – это сумма $|n|:=n_1+n_2+...+n_k$. Рассмотрим следующую задачу Эрмита – Паде [1; гл. 4, §3]:

***Задача* ЭП.** *Для заданного мультииндекса* $n=(n_1,n_2...,n_k)$ *найти такие не равные тождественно нулю одновременно многочлены* $A_1=A_n^1,...,A_k=A_n^k$, *что* $\deg A_1\le n_1-1,...,\ \deg A_k\le$ $\le n_k-1$ *и для некоторого многочлена* $B=B_n$,

$$L_n(z):=\sum_{j=1}^{k}A_j(z)f_j(z)-B(z)=\frac{c_n}{z^{|n|}}+.... \qquad (1.2)$$

Многочлен $B(z)=B_n(z)$ является полиномиальной частью ряда $\sum_{j=1}^{k}A_j(z)f_j(z)$.

Хорошо известно [1]– [3], что решение поставленной задачи существует, но не единственное. В частности, многочлены A_j и B находятся с точностью до мультипликативного множителя: если пара (A,B), где $A=(A_1,...,A_k)$, удовлетворяет необходимым условиям, то умножая многочлены A_j и B на любое отличное от нуля комплексное число λ, получим новую пару $(\lambda A,\lambda B)$, удовлетворяющую поставленным условиям. Эта неединственность может быть и более существенной. Действительно, рассмотрим

***Пример* 1.1.** *Пусть* $k=2, n=(2,2)$, *а*

$$f_1(z)=-f_2(z)=\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}+\frac{8}{z^4}+....$$

Тогда $A_1(z)=(a+bz)$,

$$A_2(z)=a+2b-2d+dz, B(z)=b-d,$$

где a, b, d любые действительные числа.

***Определение* 1.1.** *Если пара* (A,B), *где* $A=(A_1,...,A_k)$, *является решением задачи Эрмита – Паде с индексом* $n\in\mathbb{N}^k$, *то многочлены* $A_1,A_2,...,A_k$ *называют многочленами Эрмита – Паде* 1*-го рода для системы f формальных степенных рядов* (1.1).

Центральным в теории таких многочленов являются понятия нормального индекса n и совершенной системы f.

***Определение* 1.2.** *Индекс* $n\in\mathbb{N}^k$ *называется нормальным для f, если для любого решения задачи Эрмита – Паде с этим индексом* $\deg A_j=n_j-1, j=1,2,...,k$.

***Определение* 1.3.** *Система f называется совершенной, если все индексы* $n\in\mathbb{N}^k$ *являются нормальными для f.*

Нормальность индекса n является достаточным условием того, что все решения задачи Эрмита – Паде (A, B) с этим индексом находятся с точностью до мультипликативного множителя (подробнее см. [1]– [3]). В этом случае говорят, что задача Эрмита – Паде имеет единственное решение. Следующий пример показывает, что уже при $k=1$ нормальность индекса n не является необходимым условием единственности решения задачи Эрмита – Паде.

***Пример* 1.2.** *Пусть* $k=1$, $n=3$, *а*

$$f(z)=\frac{1}{z-2}+\frac{8}{z^4}=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}+\frac{16}{z^4}+\dots.$$

Тогда все решения задачи ЭП имеют вид $(\lambda A_1, \lambda B)$, *где* λ *– произвольное комплексное число, отличное от нуля, а* $A_1(z)=z-2, B(z)=1$. *При этом индекс* $n=3$ *не является нормальным, поскольку* $\deg A_1=1$.

Нашей ближайшей целью является нахождение необходимых и достаточных условий на индекс $n\in\mathbb{N}^k$ и систему *f*, определенную равенствами (1.1), при которых решение задачи Эрмита – Паде с этим индексом является единственным.

2 Основные определения

Решение поставленной задачи будет получено нами в терминах теории линейных алгебраических уравнений. Соответствующая система линейных уравнений, равносильная равенству (1.2), определяется непосредственно коэффициентами степенных рядов (1.1).

Введем необходимые обозначения. Зафиксируем индекс $n\in\mathbb{N}^k$ и для каждого $j=1,2,\dots,k$ рассмотрим матрицы-столбцы порядка $(|n|-1)\times 1$

$$F_i^j=\left(f_{i-1}^j\ f_i^j\ \dots f_{|n|+i-3}^j\right)^T,\ i=1,2,\dots,n_j,$$

и матрицы порядка $(|n|-1)\times|n_j|$

$$F^j=\left[F_1^j\ F_2^j\ \dots F_{nj}^j\right],$$

где C^T является матрицей, транспонированной к матрице *C*. Далее рассмотрим матрицу порядка $(|n|-1)\times|n|$

$$F_n=\left[F^1\ F^2\ \dots F^k\right]$$

и функциональные матрицы-строки порядка $1\times|n|$

$$E_1(z)=\left(1\ z\ \dots\ z^{n_1-1}\ 0\ 0\ \dots\ 0\ \dots\ 0\ 0\ \dots\ 0\right),$$

$$E_2(z)=\left(0\ 0\ \dots\ 0\ 1\ z\ \dots\ z^{n_2-1}\ \dots\ 0\ 0\ \dots\ 0\right),$$

$$\dots$$

$$E_k(z)=\left(0\ 0\ \dots\ 0\ 0\ 0\ \dots\ 0\ \dots\ 1\ z\ \dots\ z^{n_k-1}\right),$$

$$E(z)=E_1(z)+\dots+E_k(z)=$$

$$=\left(1\ z\ \dots\ z^{n_1-1}\ 1\ z\ \dots\ z^{n_2-1}\ \dots\ 1\ z\ \dots\ z^{n_k-1}\right).$$

Обозначим через $G_j(z)$ матрицу-строку, которая при $n_j>1$ получается в результате замены в матрице $E_j(z)$ ненулевых элементов: 1 заменяем на 0, z заменяем на f_o^j, z^2 заменяем на $f_o^j z+f_1^j$ и т. д., наконец, z^{n_j-1} заменяем на $\sum_{i=0}^{n_j-2} f_i^j z^{n_j-i-2}$ (при $n_j=1$ в $E_j(z)$ единственный ненулевой элемент 1 заменяем на 0). Матрицу-строку $G(z)$ определим равенством

$$G(z)=G_1(z)+\dots+G_k(z).$$

Если в матрице F_n порядка $(|n|-1)\times|n|)$ добавить в качестве последней строки строку $E_j(z)$, то получим квадратную матрицу. Обозначим определитель этой матрицы через $A_j(z)$. Тогда при $j=1,2,\dots k$

$$A_j(z)= \tag{2.1}$$

$$=\begin{vmatrix} f_0^1 & \dots & f_{n_1-1}^1 & \dots & f_0^j & f_1^j & \dots & f_{n_j-1}^j & \dots & f_0^k & \dots & f_{n_k-1}^k \\ f_1^1 & \dots & f_{n_1}^1 & \dots & f_1^j & f_2^j & \dots & f_{n_j}^j & \dots & f_1^k & \dots & f_{n_k}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{|n|-2}^1 & \dots & f_{|n|+n_1-3}^1 & \dots & f_{|n|-2}^j & f_{|n|-1}^j & \dots & f_{|n|+n_j-3}^j & \dots & f_{|n|-2}^k & \dots & f_{|n|+n_k-3}^k \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & z & \dots & z^{n_j-1} & \dots & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Если в определении (2.1) последнюю строку $E_j(z)$ заменить строкой $G(z)$ получим новый определитель. Его обозначим через $B(z)$. И наконец, если последнюю строку определителя (2.1) заменить матрицей-строкой

$$F_i^n=$$

$$=\left(f_{|n|+i-2}^1\ f_{|n|+i-1}^1 \dots f_{|n|+n_1+i-3}^1 \dots f_{|n|+i-2}^k\ f_{|n|+i-1}^k \dots f_{|n|+n_k+i-3}^k\right),$$

то полученный определитель обозначим через $d_{n,i}$.

***Определение* 2.1.** *Индекс* $n\in\mathbb{N}^k$ *назовем вполне нормальным для f, если ранг матрицы* F_n *равен* $|n|-1$.

В примере 1.1 индекс $n=(2,2)$ не является нормальным и не является вполне нормальным, а в примере 1.2 индекс $n=3$ не является нормальным, но является вполне нормальным относительно рассматриваемых в этих примерах систем функций.

***Определение* 2.2.** *Систему f назовем вполне совершенной, если все индексы* $n\in\mathbb{N}^k$ *являются вполне нормальными для f.*

Далее будет показано, что любая совершенная система *f* является и вполне совершенной системой. Пример 1.2 показывает, что обратное утверждение может быть неверным.

3 Критерий единственности. Детерминантные представления

Сформулируем и докажем основную теорему данной работы.

***Теорема* 3.1.** *Для того, чтобы для фиксированного индекса* $n \in \mathbb{N}^k$ *задача Эрмита – Паде имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс n был вполне нормальным для f, т. е.* $rangF_n = |n| - 1$.

В случае, если индекс n является вполне нормальным, при определенном выборе мультипликативного множителя для решений (A, B) *задачи Эрмита – Паде справедливы следующие детерминантные представления:*

$$A_j(z) = det\left[F_n \; E_j(z)\right]^T := \begin{bmatrix} F_n \\ E_j(z) \end{bmatrix}, \; j = 1...k, \quad (3.1)$$

$$B(z) = det\left[F_n \; G(z)\right]^T := \begin{bmatrix} F_n \\ G(z) \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$L_n(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{n,i}^j}{z^{|n|+i-1}}. \quad (3.3)$$

В развернутом виде многочлены $A_j(z)$ представлены равенствами (2.1).

Доказательство. Пусть

$$A_j(z) = b_0^j + b_1^j z + ... + b_{n_j-1}^j z^{n_j-1}, \; j = 1, ..., k.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов $b_0^j, b_1^j, ..., b_{n_j-1}^j$ запишем в матричной форме систему линейных уравнений, равносильную условию (1.2):

$$F_n \times b^T = \Theta^T, \quad (3.4)$$

где b – матрица-строка порядка $1 \times |n|$,

$$b = (b_0^1 \; b_1^1 \; ... \; b_{n_1-1}^1 \; ... \; b_0^k \; b_1^k \; ... \; b_{n_k-1}^k),$$

а Θ – матрица-строка порядка $1 \times |n|$, все элементы которой равны нулю.

Поскольку система (3.4) является однородной и в ней число неизвестных на единицу больше числа уравнений, то из теоремы Кронекера – Капелли следует, что система (3.4) имеет ненулевое решение. Кроме того, множество всех линейно независимых решений системы (3.4) состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда $rangF_n = |n| - 1$. В этом случае все остальные ненулевые решения получаются домножением этого фундаментального решения на число $\lambda \neq 0$. Число λ, вообще говоря, является комплексным, но если коэффициенты рядов (1.1) действительные числа, то решения системы (3.4) также действительные числа. Таким образом первая часть теоремы 3.1 доказана.

Докажем теперь равенства (3.1)–(3.4). Без ограничения общности будем считать, что все ряды (1.1) не являются формальными, т. е. их суммы являются аналитическими функциями в некоторой окрестности точки $z = \infty$ (если хотя бы один из рядов (1.1) является формальным, то формальным будет и ряд в (3.3)).

Так как $rangF_n = |n| - 1$, то при некотором $p \in \{1, 2, ..., |n|\}$ определитель, полученный из матрицы F_n, вычеркиванием в ней *p*-го столбца, отличен от нуля. Для определенности предположим, что $p = |n|$. Тогда систему (3.4) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} f_0^1 & ... & f_{n_1-1}^1 & ... & f_0^k & ... & f_{n_k-2}^k \\ f_1^1 & ... & f_{n_1}^1 & ... & f_1^k & ... & f_{n_k-1}^k \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ f_{|n|-2}^1 & ... & f_{|n|+n_1-3}^1 & ... & f_{|n|-2}^k & ... & f_{n+n_k-4}^k \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} b_0^1 \\ ... \\ b_{n_1-1}^1 \\ ... \\ b_0^k \\ ... \\ b_{n_k-2} \end{pmatrix} = -b_{n_k-1} \begin{pmatrix} f_{n_k-1}^k \\ f_{n_k}^k \\ ... \\ f_{|n|+n_k-4}^k \\ f_{|n|+n_k-3}^k \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Обозначим главный определитель этой системы через $H_n^{n_k}$. Тогда по предположению $H_n^{n_k} \neq 0$. Если бы $b_{n_k-1} = 0$, то система (3.5) имела бы единственное нулевое решение. Тогда бы и система (3.4) имела только нулевое решение. Поэтому $b_{n_k-1} \neq 0$. Учитывая, что мы ищем решение с точностью до мультипликативного множителя, можем считать, что $b_{n_k-1} = 1$. Решаем далее систему (3.5) по правилу Крамера, получим решение, которое символически можно записать в виде:

$$det\left[F_n \quad E(z)\right]^T = A_1(z) + ... + A_k(z), \quad (3.6)$$

где $A_j(z)$ определяются равенствами (3.1), которые в развернутом виде представлены соотношениями (2.1). В случае, если бы вместо номера $p = |n|$ вычеркивали столбец матрицы F_n с другим номером, рассуждая аналогичным образом, также пришли бы к символической записи решения в виде (3.6). Докажем, что $A_j(z)$, определенные равенствами (2.1) и (3.1), и являются искомыми многочленами.

Разложив определитель в (2.1) по элементам последней строки, нетрудно заметить, что $A_j(z)$ – многочлен и $degA_j(z) \leq n_j - 1$. Остается доказать, что при заданном с помощью равенства (3.2) многочлене $B(z)$ (в развернутом виде равенство (3.2) можно получить, если в (2.1) последнюю строку заменить матрицей-строкой $G(z)$), многочлены $A_j(z)$ удовлетворяют условию (3.3). Для этого заметим, что для таких многочленов

$$\sum_{j=1}^{k} A_j(z) f_j(z) = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \cdots & f_{n_1-1}^1 & \cdots & f_0^k & f_1^k & \cdots & f_{n_k-1}^k \\ f_1^1 & f_2^1 & \cdots & f_{n_1}^1 & \cdots & f_1^k & f_2^k & \cdots & f_{n_k}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{|n|-2}^1 & f_{|n|-1}^1 & \cdots & f_{|n|+n_1-3}^1 & \cdots & f_{|n|-2}^k & f_{|n|-1}^k & \cdots & f_{|n|+n_1-3}^k \\ \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^1}{z^{i+1}} & \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^1}{z^{i}} & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^1}{z^{i-n_1+2}} & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^k}{z^{i+1}} & \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^k}{z^{i}} & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^k}{z^{i-n_k+2}} \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе из последней строки вычтем: первую строку, умноженную на z^{-1}, вторую строку, умноженную на z^{-2}, и так далее вплоть до предпоследней строки, умноженной на $z^{-|n|+1}$. В результате в правой части предыдущего равенства получим определитель, у которого последний элемент каждого столбца состоит из многочлена относительно переменной z и ряд с лакунами по степеням z^{-1}. Сохраняя в последней строке этого определителя в каждом столбце только полиномиальную часть, придем к определителю

$$B(z) = det\begin{bmatrix} F_n & G(z) \end{bmatrix}^T.$$

Тогда

$$L_n(z) = \sum_{j=1}^{k} A_j(z) f_j(z) - B(z) =$$

$$= \begin{vmatrix} f_0^1 & \cdots & f_{n_1-1}^1 & \cdots & f_0^k & \cdots & f_{n_k-1}^k \\ f_1^1 & \cdots & f_{n_1}^1 & \cdots & f_1^k & \cdots & f_{n_k}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{|n|-2}^1 & \cdots & f_{|n|+n_1-3}^1 & \cdots & f_{|n|-2}^k & \cdots & f_{|n|+n_1-3}^k \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{f_{|n|+i-2}^1}{z^{|n|+i-1}} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{f_{|n|+n_1+i-3}^1}{z^{|n|+i-1}} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{f_{|n|+i-2}^k}{z^{|n|+i-1}} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{f_{|n|+n_1+i-3}^k}{z^{|n|+i-1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{n,i}}{z^{|n|+i-1}}.$$

При преобразованиях воспользовались определением суммы степенного ряда и правилом сложения определителей.

4 Замечания и некоторые следствия

Из равенств (3.1)–(3.3) следует, что компонента n_j заданного вполне нормального индекса $n = (n_1, ..., n_k)$ определяет число коэффициентов ряда $f_j(z)$, которое учитывается при построении многочленов $A_j(z), B(z)$ и функции $L_n(z)$.

Легко заметить, что теорема 3.1 справедлива и при условии, что $n_j = 0$. В этом случае нужно лишь считать, что матрица F_n и определители в (3.1)–(3.3) не содержат столбцов с коэффициентами ряда $f_j(z)$, т. е. формальный ряд $f_j(z)$ не участвует в построении решения задачи ЭП, а вектор b не содержит неизвестных коэффициентов, определяющих многочлен $A_j(z)$, при этом порядок мультииндекса $|n|$ определяется только оставшимися ненулевыми компонентами.

В частности, если $n_2 = n_3 = ... = n_k = 0$, то $n = (n_1, 0, ..., 0)$ и тогда $|n| = n_1$. Если отождествить n_1 с n, то получим фактически одномерный случай, когда $k = 1$ (в построениях учитываются только коэффициенты функции $f(z) := f_1(z)$). В таком случае, например, равенство (3.1) примет вид

$$A_1(z) = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_{n-1} \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-2} & f_{n-1} & \cdots & f_{2n-2} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} \end{vmatrix},$$

и нормальность индекса n равносильна тому, что определитель Ганкеля (это утверждение известно [1; гл. 2, §3, утверждение 3.2]).

$$H_n = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_{n-2} \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-2} & f_{n-1} & \cdots & f_{2n-3} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В общем случае нормальность индекса $n = (n_1, n_2, ..., n_k) \in \mathbb{N}^k$ равносильна условию

$$\prod_{j=1}^{k} H_n^j \neq 0,$$

где H_n^j является определителем матрицы F_n, если в ней выбросить столбец $F_{n_j}^j$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никишин*, *Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988.

2. *Stahl*, *H.* Asymptotics for quadratic Hermite-Padé polynomals associated with the exponential function / H. Stahl / Electronic Trans. Num. Anal. – 2002. – № 14 – P. 193–220.

3. *Бейкер мл.*, *Дж.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986.

Поступила в редакцию 17.04.19.