Проблемы физики, математики и техники, № 3 (40), 2019

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ПРОСТЫЕ НЕАБЕЛЕВЫ ГРУППЫ С ПРОНОРМАЛЬНЫМИ ВТОРЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В.Н. Тютянов

Международный университет МИТСО, Гомель

SIMPLE NON-ABELIAN GROUPS WITH SECOND MAXIMAL PRONORMAL SUBGROUPS

V.N. Tyutyanov

International University MITSO, Gomel

В.И. Зенков поставил в Коуровскую тетрадь проблему 19.109: верно ли, что в конечной простой неабелевой группе G все максимальные подгруппы холловы тогда и только тогда, когда любая вторая максимальная подгруппа группы G является пронормальной в G? В настоящей работе показано, что данная проблема решается отрицательно.

Ключевые слова: *конечная группа*, *вторая максимальная подгруппа*, *пронормальная подгруппа.*

V.I. Zenkov put in the Kourovskaya notebook the following problem 19.109: is it true that in a non-abelian finite simple group G all maximal subgroups are Hall subgroups if and only if every second maximal subgroup is pronormal in G? This paper shows that this problem is solved negatively.

Keywords: *finite group*, *second maximal subgroup*, *pronormal subgroup.*

Введение

Пусть G – конечная простая неабелева группа. В.И. Зенков поставил в Коуровскую тетрадь [1] проблему 19.109: *верно ли*, *что любая максимальная подгруппа в группе G холлова тогда и только тогда*, *когда любая вторая максимальная подгруппа группы G является пронормальной в G*?

В работе показывается, что данная проблема решается отрицательно.

Приведем следующие хорошо известные определения.

***Определение* 0.1.** *Пусть G – конечная группа и H – подгруппа в G. Подгруппа H называется пронормальной в группе G*, *если для всякого* $g \in G$ *подгруппы H и* H^g *сопряжены в порождении* $< H, H^g >$.

***Определение* 0.2.** *Если подгруппа H является максимальной в некоторой максимальной подгруппе группы G*, *то H называется второй максимальной подгруппой.*

Строение конечной группы существенно зависит от строения ее вторых максимальных подгрупп и способа их вложения в группу. Хупперт в [2] показал, что если в конечной группе G все вторые максимальные подгруппы нормальны в G, то G является сверхразрешимой группой. Судзуки [3] и Янко [4] доказали, что если в неразрешимой группе все вторые максимальные подгруппы нильпотентны, то она изоморфна $PSL_2(5)$ или $SL_2(5)$. Разрешимый случай был изучен В.А. Белоноговым [5]. В.С. Монахов и В.Н. Княгина [6] установили, что если всякая вторая максимальная подгруппа группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной в G, то любая собственная подгруппа в G сверхразрешима.

В работе [7] показано, что имеются в точности три простых неабелевых группы, в которых все максимальные подгруппы холловы: $PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$ и $PSL_5(2)$. Непростые группы с холловыми максимальными подгруппами хорошо изучены в [8], [9].

Ранее автор установил следующий результат, анонсированный в [1].

***Теорема* 0.3.** *Пусть* $G \cong SL_2(2^{11})$, *тогда любая вторая максимальная подгруппа группы G является пронормальной в G.*

Так как группа $SL_2(2^{11})$ имеет максимальные подгруппы, не являющиеся холловыми, то проблема В.И. Зенкова решается отрицательно.

Контрпример, указанный в теореме 0.3, не является единственным. Серия таких контрпримеров приводится в следующей теореме.

***Теорема* 0.4.** *Пусть* $G \cong SL_2(2^p)$, *где* $11 < p$ *– простое число. Если* $2^p - 1$ *не является простым числом Ферма, то любая вторая максимальная подгруппа группы G будет пронормальной в G.*

Мы приведем полное доказательство обоих, указанных выше результатов.

1 Вспомогательные результаты

Все группы предполагаются конечными. Определения и обозначения стандартны, их можно найти в [10] и [11]. $[A]B$ – полупрямое произведение групп A и B, где A нормальна в $[A]B$ и $A \cap B = 1$. Если m и n – натуральные числа, то (m,n) – их наибольший общий делитель. Z_p^n – прямое произведение n сомножителей, каждый из которых изоморфен группе Z_p. Пусть π – некоторое множество различных простых делителей порядка группы *G*. Будем говорить, что группа *G* обладает свойством D_π (является D_π-группой), если она содержит холлову π-подгруппу, все холловы π-подгруппы сопряжены в G и любая π-подгруппа содержится в некоторой холловой π-подгруппе группы *G*. Множество всех холловых π-подгрупп группы *G* обозначается $Hall_\pi(G)$. Через A_n и S_n будем обозначать знакопеременную и симметрическую группы подстановок соответственно.

Приведем вспомогательные результаты, которые будут использоваться при доказательстве теоремы 0.3 и теоремы 0.4.

***Лемма* 1.1** [11, теорема II.8.27]. *Группа* $PSL(2,p^f)$ *обладает только следующими подгруппами*:

(1) *Элементарная абелева p-группа.*

(2) *Циклическая группа порядка z, где* z *делит* $\frac{p^f \pm 1}{k}$ *и* $k=(p^f-1,2)$.

(3) *Диэдр порядка* 2*z*, *где* z *как в* (2).

(4) *Знакопеременная группа* A_4 *для* $p>2$ *или* $p=2$ *и* $f \equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$.

(5) *Симметрическая группа* S_4 *для*

$$p^{2f}-1 \equiv 0(\mathrm{mod}\,16).$$

(6) *Знакопеременная группа* A_5 *для* $p=5$ *или* $p^{2f}-1 \equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$.

(7) *Полупрямое произведение элементарной абелевой группы порядка* p^m *с циклической группой порядка t, где t делит* p^m-1 *и t делит* p^f-1.

(8) *Группы* $PSL(2,p^m)$ *когда m делит f и* $PGL(2,p^m)$ *когда* 2*m делит f.*

***Лемма* 1.2.** *Пусть m – нечетное натуральное число. Тогда* $(2^m \pm 1,5)=1$.

Доказательство. Имеют место следующие сравнения: $2^1 \equiv 2(\mathrm{mod}\,5)$, $2^3 \equiv 3(\mathrm{mod}\,5)$, $2^5 \equiv 2(\mathrm{mod}\,5)$, $2^7 \equiv 3(\mathrm{mod}\,5)$, $2^9 \equiv 2(\mathrm{mod}\,5)$, $2^{11} \equiv 3(\mathrm{mod}\,5)$. Таким образом, при $m \le 11$ имеем, что $2^m \equiv 2,3(\mathrm{mod}\,5)$.

Пусть для некоторого нечетного $k>11$ имеет место сравнение $2^k \equiv 2,3(\mathrm{mod}\,5)$. Возможны случаи:

1. $2^k \equiv 2(\mathrm{mod}\,5)$. Тогда

$$2^{k+2}=4\cdot 2^k=4(5t+2)=5(4t+1)+3 \equiv 3(\mathrm{mod}\,5).$$

2. $2^k \equiv 3(\mathrm{mod}\,5)$. Тогда

$$2^{k+2}=4\cdot 2^k=4(5t+3)=10(2t+1)+2 \equiv 2(\mathrm{mod}\,5).$$

По индукции заключаем, что $2^m \equiv 2,3(\mathrm{mod}\,5)$. Отсюда легко следует, что $(2^m \pm 1,5)=1$ для всякого нечетного натурального числа *m*.

2 Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 0.3.

Пусть $G \cong SL_2(2^{11})$, тогда

$$|G|=2^{11}(2^{11}-1)(2^{11}+1)=2^{11}\cdot 2047\cdot 2029=$$
$$=2^{11}\cdot(23\cdot 89)\cdot(3\cdot 683)=2^{11}\cdot 3\cdot 23\cdot 89\cdot 683.$$

Максимальные подгруппы в *G* это в точности подгруппы: $2^{11}:2047$, $2047:2$ и $2049:2$. Всюду далее *M* – некоторая максимальная подгруппа в *G*, *H* – вторая максимальная подгруппа в *G*. Отметим, что если $<H,H^g>=G$, то H и H^g сопряжены в их порождении. Поэтому будем считать, что $<H,H^g>$ – собственная подгруппа в группе *G*.

Последовательно рассмотрим все случаи.

1. $M \cong 2^{11}:2047$. Тогда максимальные подгруппы из M содержатся в списке: $H \in \{2047, 2^{11}:23, 2^{11}:89\}$. Пусть $H \cong 2047$. Так как $H \in Hall_{\{23,89\}}(G)$ и является нильпотентной, то по теореме Виландта [12] *G* обладает свойством $D_{\{23,89\}}$. Следовательно, *H* и H^g сопряжены в $<H,H^g>$. Пусть $H \cong 2^{11}:23$. Из строения максимальных подгрупп группы *G* следует, что $<H,H^g> \le M$. Так как *M* содержит единственную подгруппу порядка $2^{11}\cdot 23$, то $H=H^g$ и *H* сопряжена с H^g в порождении $<H,H^g>=H$. Случай $H \cong 2^{11}:89$ рассматривается также, как случай $H \cong 2^{11}:23$.

2. $M \cong 2047:2$. Тогда $H \in \{2047, 23:2, 89:2\}$. Случай $H \cong 2047$ был рассмотрен. Пусть $H \cong 23:2$. Поскольку $2^{11}:2047$ – группа Фробениуса [13, теорема 2.8.2], то $<H,H^g> \le M$. Положим, что $H=[<a>]<\tau>$, где $|a|=23$, $|\tau|=2$ и $<a>$ нормальна в *M*. Тогда $H^g = =[<a>]<\mu>$, где μ – некоторая инволюция из *M*. Так как все инволюции в диэдре *M* сопряжены, то найдется $m \in M$ такой, что $<\tau>^m=<\mu>$. Поэтому *H* и H^g сопряжены в $<H,H^g>$. Случай $H \cong 89:2$ рассматривается так же, как $H \cong 23:2$.

3. $M \cong 2049:2$. Максимальные подгруппы из M содержатся в списке: $H \in \{2049, 3:2, 683:2\}$. Повторяя рассуждения пункта 2, показывается, что подгруппа H – пронормальна в группе *G*. Теорема 0.3 доказана. □

Доказательство теоремы 0.4.

Пусть группа *G* удовлетворяет условию теоремы 2, тогда $|G|=2^p(2^p-1)(2^p+1)$. По лемме 1.1

максимальными подгруппами в группе G могут быть сопряженные со следующими подгруппами: подгруппа Бореля $[U]H \cong [Z_2^p]Z_{\{2^p-1\}}$, диэдр $[H] < \tau > \cong [Z_{\{2^p-1\}}]Z_2$, диэдр $[R] < \tau > \cong [Z_{\{2^p+1\}}]Z_2$, $L \cong A_5$, $F \cong S_4$, $P \cong A_4$.

По лемме 1.2 $(|G|, 5) = 1$, поэтому группа G не может содержать подгрупп, изоморфных A_5. Силовская 2-подгруппа у S_4 является диэдральной порядка 8. Поскольку силовская 2-подгруппа в G элементарная абелева, то G не может содержать подгрупп, изоморфных S_4. Группа A_4 является нормализатором своей силовской 2-подгруппы, изоморфной Z_2^2. Так как силовская 2-подгруппа в G изоморфна Z_2^p, где $p > 11$, то подгруппа $P \cong A_4$ не максимальна в G.

Таким образом, максимальные подгруппы в G с точностью до сопряженности это подгруппы $[U]H$, $[H] < \tau >$, $[R] < \tau >$. Всюду далее M – некоторая максимальная подгруппа в G, T – вторая максимальная подгруппа в G. Отметим, что если $< T, T^g > = G$, то T и T^g сопряжены в их порождении. Поэтому будем считать, что $< T, T^g >$ – собственная подгруппа в группе G.

Рассмотрим все случаи.

1. $M = [U]H$. Максимальные подгруппы из M содержатся в следующем списке

$$T \in \{H; [U]H_i, \text{ где } H_i < \cdot H\}.$$

Пусть $T = H$. Так как $(2^p - 1, 2^p + 1) = 1$, то T – холлова циклическая подгруппа в группе G. По теореме Виландта [12] группа G обладает свойством $D_{\{2^p-1\}}$. Поэтому T и T^g сопряжены в любом порождении $< T, T^g >$.

Рассмотрим случай $T = [U]H_i$. Из строения максимальных подгрупп группы G следует, что $< T, T^g > \leq M$. Так как T единственная в M подгруппа порядка $|U||H_i|$, то $T = T^g$ и T сопряжена с T^g в порождении $< T, T^g > = T$.

2. $M = [H] < \tau >$. Максимальные подгруппы из M содержатся в списке:

$$T \in \{H; [H_i] < \tau >, \text{ где } H_i < \cdot H\}.$$

Отметим, что так как $2^p - 1$ не простое число, то $H_i \neq 1$ и, в частности, $< \tau >$ не максимальна в M. Случай $T = H$ был рассмотрен. Поэтому $T = [H_i] < \tau >$. Согласно [13] $[U]H$ – группа Фробениуса, следовательно, $< T, T^g > \leq M$. Из строения M заключаем, что $T^g = [H_i] < \mu >$, где μ некоторая инволюция из M. Все инволюции в диэдре M сопряжены, а значит найдется элемент $m \in M$ для которого $< \tau >^m = < \mu >$. Поэтому T и T^g сопряжены в $< T, T^g >$.

3. $M = [R] < \tau >$. Максимальные подгруппы из M содержатся в списке:

$$T \in \{R; [R_i] < \tau >, \text{ где } R_i < \cdot R\}.$$

Так как $2^p + 1$ не является простым числом Ферма, то $R_i \neq 1$. Дословное повторение рассуждений пункта 2 показывают, что T пронормальна в G. Теорема 0.4 доказана. □

Вопрос. *Хорошо известно, что имеется достаточно много чисел вида* $2^p - 1$, *где p – простое число, не являющимися простыми числами Мерсенна. Автору не известно конечно ли множество таких чисел. Соответственно, конечна или бесконечна серия простых неабелевых групп в теореме* 0.4?

ЛИТЕРАТУРА

1. *The Kourovka Notebook*: Unsolved Problems in Group Theory // Institute of Mathematics, Russian Academy of Scinces. – Novosibirsk, 2018.

2. *Huppert*, *B.* Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – B. 60. – S. 409–434.

3. *Suzuki*, *M.* The nonexistence of certain type of simple groups of odd order / M. Suzuki // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8. – P. 686–695.

4. *Janko*, *Z.* Endliche Gruppen mit lauter nilpotenten zweitmaximalen Untergruppen / Z. Janko // Math. Z. – 1962. – B. 79. – S. 422–424.

5. *Белоногов*, *В.А.* Конечные разрешимые группы с нильпотентными максимальными подгруппами / В.А. Белоногов // Матем. заметки. – 1968. – Т. 3, №1. – С. 21–32.

6. *Monakhov*, *V.S.* Finite groups with P-subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Ricerche di Matematica. – 2013. – Vol. 60, № 2. – P. 307–322.

7. *Тихоненко*, *Т.В.* Конечные группы с максимальными холловыми подгруппами / Т.В. Тихоненко, В.Н. Тютянов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2008. – № 5 (50). – С. 198–206.

8. *Monakhov*, *V.S.* Finite π-solvable groups whose maximal subgroups have the Hall property / V.S. Monakhov // Math. Notes. – 2008. – Vol. 84, № 3. – P. 363–366.

9. *Maslova*, *N.V.* Finite groups whose maximal subgroups have the Hall property / N.V. Maslova, D.O. Revin // Siberian Advances Math. – 2013. – Vol. 23, № 3. – P. 196–209.

10. *Atlas of finite groups* / J.H. Conway [et al.]. – London: Clarendon Press, 1985. – 252 p.

11. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1967. – 793 s.

12. *Wielandt*, *H.* Zum Satz von Sylow / H. Wielandt // II Math. Z. – 1959. – B. 71. – S. 461–462.

13. *Gorenstein*, *D.* Finite groups / D. Gorenstein – New York.: Harper and Row, 1968. – 527 p.

Поступила в редакцию 12.04.19.