Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 3

УДК 518:517.392 МАТЕМАТИКА

И. П. МЫСОВСКИХ, В. Я. ЧЕРНИЦИНА

ОТВЕТ НА ОДИН ВОПРОС РАДОНА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 20 XI 1970)

Пусть Ω — множество точек на плоскости такое, что существуют интегралы

$$\mu_{ik} = \iint\limits_{\Omega} x^i y^k dx\, dy, \quad i, k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

— моменты Ω и $\mu_{00} > 0$. Поскольку Ω служит областью интегрирования, то будем Ω называть областью. Обозначим основные ортогональные многочлены третьей степени области Ω

$$P_{3-i,\,i} = x^{3-i}y^i + Q_{3-i,\,i}, \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{2}$$

Здесь $Q_{3-i,\,i}$ — многочлен второй степени от x и y, коэффициенты которого определяются условиями ортогональности $P_{3-i,\,i}$ ко всем многочленам степени $\leqslant 2$. Многочлены (2) определяют числа

$$\begin{gathered} A = \iint\limits_{\Omega} [P_{30}P_{12} - P_{21}^2]\, dx\, dy, \\ B = \iint\limits_{\Omega} [P_{30}P_{03} - P_{21}P_{12}]\, dx\, dy, \\ C = \iint\limits_{\Omega} [P_{21}P_{03} - P_{12}^2]\, dx\, dy. \end{gathered} \tag{3}$$

В [1] Радон поставил вопрос: существует ли область Ω, для которой выполнено условие

$$A = B = C = 0? \tag{4}$$

При этом он отмечает, что для рассмотренных им областей (в том числе квадрата, круга и треугольника) условие (4) не имеет места и что невозможность (4) доказать не удалось.

В настоящей работе дан положительный ответ на вопрос Радона: указана область Ω, для которой выполнено условие (4).

Обозначим через Ω_1 множество точек (x, y), удовлетворяющих неравенствам

$$-\tau \leqslant x \leqslant \tau, \quad 0 \leqslant y \leqslant e^{-|x|},$$

и через Ω_2 — прямоугольник

$$-\sigma \leqslant x \leqslant \sigma, \quad -\varepsilon \leqslant y \leqslant 0.$$

Возьмем в качестве области Ω объединение Ω_1 и Ω_2. Область $\Omega = \Omega(\tau, \varepsilon, \sigma)$, а тем самым и числа A, B, C зависят от трех параметров $\tau, \varepsilon, \sigma$. Каждая область семейства $\Omega(\tau, \varepsilon, \sigma)$ симметрична относительно оси y. Это обеспечивает $\mu_{ik} = 0$ при i нечетном и упрощает вычисления. В частности, основные ортогональные многочлены (2) записываются в виде

$$\begin{aligned} P_{30} &= x^3 + a_0x + b_0xy, \\ P_{21} &= x^2y + a_1 + b_1y + c_1x^2 + d_1y^2, \\ P_{12} &= xy^2 + a_2x + b_2xy, \\ P_{03} &= y^3 + a_3 + b_3y + c_3x^2 + d_3y^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Вычисление каждого из этих многочленов сводится к решению линейной алгебраической системы из четырех или двух уравнений. Отметим также, что для областей семейства $B = 0$.

Таким образом, если среди областей $\Omega(\tau, \varepsilon, \sigma)$ существует такая, для которой выполнено (4), то определяющие ее параметры удовлетворяют нелинейной системе уравнений

$$\begin{aligned} A(\tau, \varepsilon, \sigma) &= 0, \\ C(\tau, \varepsilon, \sigma) &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Решение системы осуществлялось численно методом Ньютона, при этом параметр τ считался фиксированным. Оказалось, что при $\tau = 3$ система (6) обладает требуемым решением. В качестве начального приближения к решению были взяты $\varepsilon = 0{,}05$ и $\sigma = 1{,}5$. У третьего и четвертого приближений по методу Ньютона совпали 7 значащих цифр.

Значения параметров ε, σ таковы:

$$\varepsilon_0 = 0{,}0484599796; \quad \sigma_0 = 1{,}26677210. \tag{7}$$

Укажем также значения моментов области Ω, определяемой параметрами (7):

$\mu_{00} = 2{,}02\,320\,136$; $\mu_{04} = 0{,}0800\,001\,109$; $\mu_{22} = 0{,}0491\,263\,615$;
$\mu_{01} = 0{,}495\,785\,775$; $\mu_{05} = 0{,}0555\,555\,492$; $\mu_{23} = 0{,}0156\,149\,713$;
$\mu_{02} = 0{,}222\,290\,905$; $\mu_{20} = 2{,}37\,291\,276$; $\mu_{40} = 8{,}93\,059\,608$;
$\mu_{03} = 0{,}124\,995\,738$; $\mu_{21} = 0{,}232\,916\,540$; $\mu_{41} = 0{,}534\,675\,518$;

и коэффициенты ортогональных многочленов (5):

$a_0 = -5{,}04\,140\,791$; $c_1 = -0{,}0537\,982\,554$; $a_3 = -0{,}0126\,594\,672$;
$b_0 = 13{,}0185\,047$; $d_1 = 0{,}986\,362\,386$; $b_3 = 0{,}324\,118\,037$;
$a_1 = 0{,}0349\,629\,476$; $a_2 = 0{,}0196\,331\,432$; $c_3 = -0{,}000\,427\,148\,533$;
$b_1 = -0{,}797\,254\,134$; $b_2 = -0{,}410\,937\,314$; $d_3 = -1{,}16\,542\,156$.

В ([2]) доказана равносильность условия (4) тому, что для Ω существует кубатурная формула с шестью узлами, точная для многочленов пятой степени:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy \simeq \sum_{j=1}^{6} c_j f(x_j, y_j). \tag{8}$$

Узлами формулы являются общие нули ортогональных многочленов (5). Существование кубатурной формулы (8) равносильно разрешимости нелинейной системы, которую мы получим, записывая, что формула (8) точна для всех одночленов степени $\leqslant 5$. Число уравнений системы, равное 21, более числа неизвестных x_i, y_i, c_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, равного 18. Вообще говоря, такая система не имеет решения, и это объясняет трудности, связанные с решением проблемы Радона.

Приведем узлы и коэффициенты кубатурной формулы (8) для $\Omega(3, \varepsilon_0, \sigma_0)$, которые были найдены с целью контроля вычислений (табл. 1).

Таблица 1

k	x_k	y_k	c_k
1	0	0,0465 331 586	0,527 308 750
2	0	0,761 743 946	0,198 232 643
3,4	±0,640 379 549	0,355 749 147	0,413 610 563
5,6	±2,079 168 224	0,0551 881 666	0,235 219 636

Строго говоря, мы нашли приближенное решение системы (6) и без дополнительного исследования не можем утверждать, что существует точное ее решение. Такое исследование было выполнено. Была применена теорема Л. В. Канторовича ([3], стр. 646) о сходимости метода Ньютона к системе (6) при $\tau = 3$ и начальному приближению $(\varepsilon_0, \sigma_0)$ к ее решению, определяемому равенствами (7).

Обозначим $J(\varepsilon, \sigma)$ матрицу Якоби системы (6) при $\tau = 3$ и проверим выполнение условий теоремы Л. В. Канторовича.

1) $\left\| \begin{bmatrix} A(3, \varepsilon_0, \sigma_0) \\ C(3, \varepsilon_0, \sigma_0) \end{bmatrix} \right\|_I \leqslant \eta = 12 \cdot 10^{-10}$;

2) $\| [J(\varepsilon_0, \sigma_0)]^{-1} \|_I \leqslant B = 3700$;

3) абсолютные величины частных производных второго порядка по ε и σ от левых частей уравнений (6) ограничены по абсолютной величине числом $L = 4{,}2$ при всех ε и σ, удовлетворяющих неравенствам

$$|\varepsilon - \varepsilon_0| \leqslant r, \qquad |\sigma - \sigma_0| \leqslant r, \tag{9}$$

где $r = 9 \cdot 10^{-6}$;

4) $h = B^2 \eta L \cdot 4 < 0{,}28$.

Условия теоремы выполнены, и можно утверждать, что система (6) имеет решение, удовлетворяющее неравенствам (9), где $r = 6 \cdot 10^{-6}$.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
19 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Radon, Monatsh. f. Math., 52, № 4, 286 (1948). [2] И. П. Мысовских, Вопр. вычислит. и прикл. матем., в. 38, 55 (1970). [3] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, 1959.