Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 5

УДК 517.946.9 *МАТЕМАТИКА*

Р. С. САКС

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИСТЕМЫ rot $u+\lambda u=h$

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 15 II 1971)

В настоящей работе рассматривается вопрос о постановке краевых задач в ограниченной односвязной области D трехмерного пространства для системы

$$\operatorname{rot} u+\lambda u=h. \tag{1}$$

Предполагается, что граница L области D — гладкая поверхность Ляпунова $\Lambda^{2,\alpha}$ $(0<\alpha<1)$, λ — отличная от нуля постоянная, вектор $h=(h_1, h_2, h_3)$ принадлежит классу $C^{2,\alpha}(\overline{D})$, а решение $u=(u_1, u_2, u_3)$ ищется в классе $C^2(D)\cap C^{1,\alpha}(\overline{D})$, $\overline{D}=D+L$, [1].

Система (1) не является эллиптической, так как ранг характеристической матрицы равен двум. А. В. Бицадзе на своем семинаре отмечал необходимость исследования краевых задач для таких систем. Отметим, что при отсутствии младшего члена $(\lambda=0)$ решение системы (1) только краевыми условиями не определяется с точностью до конечно-мерного подпространства, так как общее решение, скажем, однородной системы (1) имеет вид $u=\operatorname{grad}\Phi$, где Φ — произвольная функция класса $C^{3,\alpha}(\overline{D})$.

При $\lambda\neq 0$ система (1) составляет один из примеров систем, которые, как показано в работе [6] на многообразии без края, являются нётеровыми операторами в соответствующих пространствах функций. Пусть $\lambda\neq 0$. Применяя к системе (1) операторы дивергенции и ротора, получим

$$\operatorname{div} u=\lambda^{-1}\operatorname{div} h, \tag{2}$$

$$\nabla\operatorname{div} u-\Delta u-\lambda^2 u=\operatorname{rot} h-\lambda h, \tag{3}$$

откуда имеем

$$\Delta u+\lambda^2 u=H,\quad H\equiv\lambda h-\operatorname{rot} h-\lambda^{-1}\nabla\operatorname{div} h. \tag{4}$$

Система (4) распадается относительно u, следовательно, каждая компонента u_j $(j=1, 2, 3)$ решения системы (1) удовлетворяет эллиптическому дифференциальному уравнению второго порядка. Если, например, задать на границе области одну из компонент вектора u, то полученная задача Дирихле, как известно [1,2], фредгольмова. Оставшиеся компоненты в этом случае, как мы покажем, нельзя задавать на всей границе L, оставаясь в классе нётеровых краевых задач.

1. Исследование связей между компонентами решения системы (1). Пусть $u_3\in C^{2,\alpha}(\overline{D})$ — фиксированное решение уравнения

$$\Delta u_3+\lambda^2 u_3=H_3,\quad H_3\equiv\lambda h_3+\frac{\partial h_1}{\partial x_2}-\frac{\partial h_2}{\partial x_1}-\lambda^{-1}\frac{\partial}{\partial x_3}\operatorname{div} h, \tag{5}$$

и область D удовлетворяет следующим условиям:

а) в D имеется поверхность S, которая не касается прямых, параллельных оси x_3 ни в одной своей точке и задается уравнением $x_3=s(x_1, x_2)$, где $s(x_1, x_2)$ — однозначная функция класса $C^{1,\alpha}(\Omega)$, а Ω — проекция области D на плоскость $x_3=0$;

б) прямая, параллельная оси x_3, проведенная через любую точку области D при своем продолжении внутри D встречает поверхность S.

Тогда линейная комбинация $u_2 + iu_1 \equiv w$, $i = \sqrt{-1}$, первых двух компонент решения и системы (1) *класса $C^{1,\alpha}(\overline{D})$ имеет общее представление*

$$w \equiv u_2 + iu_1 = \varphi(z) e^{-i\lambda x_3} + \widetilde{w}(x), \quad z = x_1 + ix_2, \quad x \in D, \tag{6}$$

где $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция переменной z в области Ω класса $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, а $\widetilde{w}(x)$ — функция класса $C^{1,\alpha}(\overline{D})$, задаваемая формулой

$$\widetilde{w}(x) = w_0(x) + \widetilde{w}_0(x') e^{-i\lambda x_3}, \quad x' = (x_1, x_2), \tag{7}$$

в которой

$$w_0(x) = e^{-i\lambda x_3} \int\limits_{s(x')}^{x_3} e^{i\lambda t} \widetilde{h}(x', t)\, dt, \quad \widetilde{h}(x) \equiv -h_1 + ih_2 + 2i \frac{\partial \widetilde{u}_3}{\partial z}, \tag{8}$$

и в обозначениях

$$V_0(x) \equiv 2 \operatorname{Re} \frac{\partial w_0(x)}{\partial \bar{z}} + \lambda \widetilde{u}_3 - h_3, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \tag{9}$$

$$v_0(x') \equiv \left(V_0 + \frac{i}{\lambda} \frac{\partial V_0}{\partial x_3} \right) e^{i\lambda x_3} \text{ при } x_3 = s(x'), \tag{10}$$

$\widetilde{w}_0(x')$ определяется интегралом

$$\widetilde{w}_0(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} \frac{v_0(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\zeta - z}, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{11}$$

причем функция $\widetilde{w} = \widetilde{u}_2 + i\widetilde{u}_1$ такова, что вектор $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{u}_3)$ является частным решением системы (1).

Доказательство. Система (1) в обозначениях $w = u_2 + iu_1$, (8), (9) имеет вид

$$\partial w / \partial x_3 + i\lambda w = \widetilde{h}, \tag{12}$$

$$V \equiv 2 \operatorname{Re} \partial w / \partial \bar{z} + \lambda \widetilde{u}_3 - h_3 = 0. \tag{13}$$

Следовательно, общее решение уравнения (12) класса $C^{1,\alpha}(\overline{D})$

$$w(x) = w_1(x') e^{-i\lambda x_3} + \widetilde{w}(x), \tag{14}$$

где $w_1(x')$ — произвольная функция класса $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, а $\widetilde{w}(x)$ — частное решение уравнения (12), определяемое формулами (7) — (11).

Легко проверить следующее утверждение.

Лемма. *Если в области D $\widetilde{u}_3$ удовлетворяет уравнению* (5), *w — уравнению* (12) *и $V_{x_3 x_3}$ существует, то левая часть $V(x)$ уравнения* (13) *удовлетворяет в D уравнению*

$$\partial^2 V / \partial x_3^2 + \lambda^2 V = 0 \tag{15}$$

и, следовательно, может быть представлена в виде

$$V(x) = \operatorname{Re} \left(v(x') e^{-i\lambda x_3} \right), \tag{16}$$

причем функция $v(x')$ определяется через $V(x)$ по формуле (10).

Отметим, что для $V_0(x)$ представление (16) можно получить также из формул (8), (9), учитывая уравнение (5), интегрированием по частям. Подставляя (14) в левую часть (13), в силу (16), (9) и (10) имеем

$$V(x) = 2 \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\partial w_1(x')}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \widetilde{w}_0(x')}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} v_0(x') \right) e^{-i\lambda x_3} \right], \quad x \in D, \tag{17}$$

откуда, учитывая (11), получим, что $\widetilde{w}(x)$ является частным решением системы (12), (13), а $w(x)$ удовлетворяет уравнению (13) тогда и только тогда, когда $w_1(x')$ является аналитической функцией $\varphi(z)$ переменной $z = x_1 + ix_2$ в области Ω ([4]).

2. Краевые задачи для системы (1). Формулы (5) и (6) подсказывают постановку краевых задач для системы (1). Так, относитель-

но u_3 мы получим нётерову краевую задачу ([1]), если зададим для нее на всей границе L общее условие Пуанкаре, удовлетворяющее условию Шапиро — Лопатинского. Мы для простоты ограничимся условием Дирихле

$$u_3|_L = f_3, \quad f_3 \in C^{2,\alpha}(L). \tag{18}$$

Задача (5), (18) является фредгольмовой, если $h \in C^{2,\alpha}(\overline{D})$ ([1]), т. е. однородная задача имеет конечное число n линейно независимых решений, а неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда выполнены $n' = n$ условий ортогональности вида

$$\iiint\limits_D H_3 v_j dx = \iint\limits_L \frac{\partial v_j}{\partial N} f_3 dS, \tag{19}$$

где $v_1, \ldots, v_n$ — полная система линейно независимых решений однородной сопряженной задачи, которая совпадает с однородной задачей (5), (18).

Пусть σ — край поверхности S и γ — граница области D. Предположим, что σ и ее проекция γ являются линиями Ляпунова. Пусть a, b, f_2 — произвольные действительные функции на σ класса $C^{1,\alpha}(\sigma)$ и такие, что $a^2 + b^2 \neq 0$. Тогда задавая выражение

$$\operatorname{Re}[(a - ib)w] \equiv au_2 + bu_1 = f_2 \qquad \text{на } \sigma, \tag{20}$$

мы приходим для каждого частного $\tilde{u}_3$, в силу представления (6), к задаче Римана — Гильберта относительно аналитической функции $\varphi(z) \in \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$:

$$\operatorname{Re}[(a(t) - ib(t)e^{-i\lambda s(t)}\varphi'(t)] = f_2(t) - \tilde{f}(t), \quad t \in \gamma, \tag{21}$$
$$\tilde{f}(t) = \operatorname{Re}[(a - ib)\tilde{w}) \quad \text{при } x_3 = s(t),$$

решение которой, как известно ([5]), зависит от индекса

$$\varkappa = \frac{1}{\pi}[\arg(a + ib)e^{i\lambda s(t)}]_\gamma, \tag{22}$$

где $[\arg f(t)]_\gamma$ означает приращение аргумента функции $f(t)$ при обходе контура γ один раз в положительном направлении. В (21), (22) $x_3 = s(t)$, $s(t) \in C^{1,\alpha}(\gamma)$, есть уравнение линии $\sigma \subset L$. Так как $s(t)$ — действительная непрерывная функция на γ, то

$$\varkappa = \frac{1}{\pi}[\arg(a + ib)]_\gamma. \tag{23}$$

Как известно ([5]), при $\varkappa \geqslant 0$ однородная задача Римана — Гильберта имеет ровно $\varkappa + 1$ линейно независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима, при $\varkappa < 0$ однородная задача имеет только тривиальное решение, а неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда удовлетворены $(-\varkappa - 1)$ условий вида

$$\int\limits_\gamma (f_2(t) - \tilde{f}(t))\,\omega_k(t)\,ds = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1, \tag{24}$$

где ω_k — вполне определенные функции от a и b класса $C^{1,\alpha}(\gamma)$. Отсюда легко вытекают следующие утверждения.

Теорема 1. *Краевая задача* (1), (18), (20) *нётерова * и ее индекс равен* $\varkappa + 1$.

* Здесь краевая задача (1), (18), (20) называется нётеровой, если однородная задача имеет лишь конечное число N линейно независимых решений, а для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно выполнение конечного числа N' условий вида (19), (24) на h, f_2, f_3. Разность $N - N'$ называется индексом задачи. При $N = N'$ задача называется фредгольмовой.

Теорема 2. *Если* $h \in C^{2,\alpha}(\overline{D})$, $f_3 \in C^{2,\alpha}(L)$, $f_2 \in C^{1,\alpha}(\gamma)$ *удовлетворяют условиям* (19), (24), *то любое решение задачи* (1), (18), (20) *принадлежит классу* $C^{1,\alpha}(\overline{D})$.

Если $a - ib = e^{i\lambda x_3}$, то задача (20) имеет наиболее простой вид: она сводится к задаче Дирихле для гармонической функции. В этом случае $\varkappa = 0$ и для определения одной произвольной постоянной достаточно задать, например, в некоторой точке $y \in \overline{D}$ выражение

$$\ln(w(y)e^{i\lambda y_3}) = f_1(y), \qquad y = (y_1, y_2, y_3), \tag{25}$$

где $f_1(y)$ — произвольная действительная постоянная.

Следствие 1. *Краевая задача* (1), (18), (20) *при* $a - ib = e^{i\lambda x_3}$, (25) *фредгольмова.*

Если $a = 1$, $b = 0$, то задача (20) сводится к заданию на $\sigma \subset L$ второй компоненты u_2 вектора u. Так как и в этом случае $\varkappa = 0$, то $\varphi(z)$ определяется с точностью до одной действительной постоянной ([5]), которая получится, если задать произвольное значение f_1 первой компоненты u_1 в любой точке $y \in \sigma$.

Следствие 2. *Краевая задача*

$$\begin{gathered} u_3|_L = f_3, \quad u_2|_\sigma = f_2, \quad u_1(y) = f_1(y), \quad y \in \sigma, \\ f_3 \in C^{2,\alpha}(L), \qquad f_2 \in C^{1,\alpha}(\sigma), \end{gathered} \tag{26}$$

для системы (1) *фредгольмова.*

В этом случае задача (21) легко сводится к задаче Дирихле, если определить аналитическую в Ω функцию $\psi(z)$ класса $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ по краевому условию

$$\operatorname{Re}\psi^+(t) = s(t), \quad t \in \gamma. \tag{27}$$

Следствие 3. *Если* λ^2 *не является собственным значением однородной задачи* (5), (18), *то однородная задача* (1), (26) ($h = 0$, $f_j = 0$, $j = 1, 2, 3$) *имеет только тривиальное решение, а неоднородная задача безусловно разрешима, причем ее решение принадлежит классу* $C^{1,\alpha}(\overline{D})$.

Аналогичное утверждение имеет место для задачи, сформулированной в следствии 1.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
20 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, «Наука», 1966. [2] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 2, 4, «Наука», 1965. [3] И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, «Наука», 1964. [4] И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, 1959. [5] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», 1968. [6] Б. Р. Вайнберг, В. В. Грушин, Матем. сборн., 72 (114), № 4 (1967).