

Ю. В. ЕГОРОВ

О СТРУКТУРЕ СУБЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 31 XII 1970)

1. В работе ⁽¹⁾ нами были даны условия алгебраического характера на главный символ скалярного псевдодифференциального оператора P , необходимые и достаточные для справедливости априорных оценок вида

$$\|u\|_s \leq C(K, s) (\|Pu\|_{s-m+\varepsilon} + \|u\|_{s-1}), \quad u \in C_0^\infty(K), \quad (1)$$

где K — произвольное компактное подмножество в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, s — любое вещественное число, $\|u\|_s$ — норма функции $u(x)$ в пространстве С. Л. Соболева — Л. Н. Слободянского $\mathcal{H}_s$, $0 \leq \delta < 1$. Такие операторы называются субэллиптическими (см. ⁽¹⁾).

В этой работе мы изучаем структуру символа субэллиптического оператора и доказываем, в частности, инвариантность определяющих его условий относительно умножения на произвольный эллиптический оператор. Некоторые утверждения такого рода имеются в работе ⁽²⁾. В этих случаях мы предлагаем более простое и элементарное доказательство. Кроме того, мы даем ответ на некоторые поставленные в ⁽³⁾ вопросы; при этом наш анализ охватывает полностью все возможные типы характеристических точек для субэллиптических операторов. Частично такие утверждения использовались и доказывались нами в ⁽⁴⁻⁷⁾.

Отметим, что первоначальное доказательство основной теоремы из ⁽⁵⁾ было неточным, и мы могли доказать в ⁽⁷⁾ достаточность условий этой теоремы лишь при выполнении одного дополнительного условия. Пользуемся случаем подчеркнуть, что это доказательство исправлено нами сейчас и теорема 1 из работы ⁽⁵⁾ справедлива в полном объеме (см. ниже теорему 1). Новое доказательство является более простым и универсальным (оно проходит одновременно для всех характеристических точек) и опирается на теорему 2 этой работы.

2. Напомним некоторые определения, используемые в теории операторов главного типа. Пусть $p^0(x, \xi)$ — главная часть символа оператора P , $a_1(x, \xi) = \operatorname{Re} p^0(x, \xi)$, $a_2(x, \xi) = \operatorname{Im} p^0(x, \xi)$. Точка $(x^0, \xi^0) \in T^*(\Omega)$ называется характеристической, если $p^0(x^0, \xi^0) = 0$. Для субэллиптических операторов $\operatorname{grad}_{x, \xi} p^0(x^0, \xi^0) \neq 0$, если (x^0, ξ^0) — характеристическая точка. Пусть $H_i = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial a_i(x, \xi)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} - \frac{\partial a_i(x, \xi)}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right]$ — оператор дифференцирования вдоль бихарактеристики, соответствующей функции $a_i(x, \xi)$ ($i=1, 2$), а H_p, H_p — соответствующие операторы для функций $p^0(x, \xi)$ и $\bar{p}^0(x, \xi)$. Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, где α_j, β_j — неотрицательные целые числа, то через $H_1^{\alpha} H_2^{\beta}$ мы обозначаем оператор $H_1^{\alpha_1} H_2^{\beta_1} \dots H_1^{\alpha_n} H_2^{\beta_n}$ (см. ^(2, 2)), где впервые использовались такие определения).

В каждой характеристической точке определим следующие три числа: $k_0(x, \xi)$ — наименьшее число такое, что $H_1^{k_0} a_2(x, \xi) \neq 0$; $k_1(x, \xi)$ — такое наименьшее число, что $H_1^{\alpha} H_2^{\beta} a_2(x, \xi) \neq 0$, $|\alpha + \beta| = k$; $k_2(x, \xi)$ — наименьшее из таких чисел, что $H_p^{k_2} \bar{p}(x, \xi) \neq 0$.

3. Для нас будут представлять интерес только те операторы, которые удовлетворяют условию

А) функция $c_1^0(x, \xi) \equiv H_2 a_1(x, \xi)$ не меняет знака на каждой связанной компоненте множества характеристических точек.

Основное условие, характеризующее субэллиптические операторы, имеет вид

В) функция $a_1(x, \xi)$ не меняет знака с минуса на плюс при движении в положительном направлении вдоль кривой $x = x(t)$, $\xi = \xi(t)$, где

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial a_2(x, \xi)}{\partial \xi_j}, \quad \frac{d\xi_j}{dt} = -\frac{\partial a_2(x, \xi)}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad a_2(x, \xi) \equiv 0.$$

В частности, из условия В вытекает, что в характеристических точках $c_1^0(x, \xi) \geq 0$, т. е. выполнено условие А. Кроме того, субэллиптические операторы удовлетворяют условию

С) $\sup k_1(x, \xi) < \infty$, где верхняя грань берется по всем характеристическим точкам $(x, \xi) \in T^*(\Omega)$.

Теорема 1 (см. (3)). Оператор P является субэллиптическим тогда и только тогда, когда выполнены условия В и С. При этом $\delta = k / (k + 1)$, где $k = \sup k_1(x, \xi)$. Если $k_1(x_0, \xi_0) = l$, где $(x_0, \xi_0) \in T^*(K)$, то оценка (1) не может выполняться при $\delta < l / (l + 1)$.

В частности, отсюда следует, что не существует операторов P (с гладким символом), для которых минимальное возможное значение δ в неравенстве (1) не равно $k / (k + 1)$, где $k \in \mathbb{Z}^+$ (см. (3-7)).

4. Перейдем теперь к изучению символа $p^0(x, \xi)$ субэллиптического оператора в окрестности характеристической точки. Будем для определенности считать, что $\text{grad}_{x, \xi} a_1(x^0, \xi^0) \neq 0$.

Следующее предложение высказано в качестве гипотезы (и в ряде случаев доказано) в работе (3).

Теорема 2. Если оператор P удовлетворяет условиям А и С и $(x^0, \xi^0) \in T^*(\Omega)$ — характеристическая точка, то для всех вещественных чисел $\theta \in [0, \pi)$, кроме, быть может, конечного числа ($\leq k_1$) значений, оператор $e^{i\theta} P$ обладает тем свойством, что $k_0(x^0, \xi^0) = k_1(x^0, \xi^0) = k_2(x^0, \xi^0)$.

Условия теоремы 2, в частности, выполнены для субэллиптических операторов.

Теорема 3. Исключительное множество значений θ , о котором говорится в теореме 2, является пустым, если векторы $\text{grad}_{x, \xi} a_1(x^0, \xi^0)$, $\text{grad}_{x, \xi} a_2(x^0, \xi^0)$ коллинеарны и множество точек, лежащих на поверхности $a_1(x, \xi) = 0$, в любой окрестности которых на этой поверхности функция $a_2(x, \xi)$ принимает значения разных знаков, является гладким многообразием S , трансверсальным к бихарактеристикам функции $a_1(x, \xi)$.

Из этой теоремы, в частности, следует, что для таких операторов значения k_0 , k_1 , k_2 инвариантны относительно умножения $p^0(x, \xi)$ на любую функцию $f: T^*(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$, не равную нулю ни в одной точке. Теорема 3, по существу, содержится в (7) (но не сформулирована в столь явном виде).

В качестве примера оператора P , удовлетворяющего условиям теоремы 2, для которого указанное исключительное множество непусто, приведем оператор

$$Pu = \frac{\partial u}{\partial x_1} + ix_1^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} - x_1^2 x_2^2 \Delta u,$$

где Δ — оператор с символом $|\xi|^2$. В точках, где $\xi_1 = \xi_2 = 0$, $x_2 = 0$, функция $a_2(x, \xi) \equiv 0$, так что $k_0(x, \xi) = \infty$. В то же время для оператора $e^{i\varphi} P$ при $0 < \varphi < \pi$ мы имеем $k_0(x, \xi) = k_1(x, \xi) = 9$.

5. Поскольку сформулированные выше утверждения инвариантны относительно общих канонических преобразований пространства $T^*(\Omega)$, мы можем считать, что в окрестности рассматриваемой точки (x^0, ξ^0) $a_1(x, \xi) = \xi_1$ и $\partial^j a_2(x^0, \xi^0) / \partial \xi_j = 0$ при $j = 3, \dots, n$, $\text{grad}_{x, \xi} a_2(x^0, \xi^0) = 0$.

Доказательство теоремы 2 основано на следующих леммах.

Лемма 1. Если оператор P удовлетворяет условиям А и С и векторы $\text{grad}_{x, \xi} a_1(x^0, \xi^0) = (0, \dots, 0; 1, 0, \dots, 0)$, $\text{grad}_{x, \xi} a_2(x^0, \xi^0)$ неколлинеарны,

то $\text{grad}_{x_1} \partial^s a_2(x^0, \xi^0) / \partial x_1^s \partial x_2^s = 0$ при $s_1 + s_2 = s < l/2$ [$k+1$], причем число $k = k_1(x^0, \xi^0)$ нечетно.

Лемма 1 доказана в работе (6). Теорема 2 в рассматриваемом случае вытекает из леммы 1 и следующего предложения, которое довольно просто доказывается с помощью ретроградного анализа.

Лемма 2. Пусть Λ — линейное пространство, порожденное одночленами $\xi_1, x^\alpha \xi^\beta$ при $|\alpha + \beta| \geq 2$, причем среди образующих отсутствуют члены вида $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ при $\alpha_1 + \alpha_2 \leq l$ и $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \xi_j$, $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \xi_j$ при $j = 1, \dots, n$, $\beta_1 + \beta_2 < (l+1)/2$. Пусть $\Lambda_1 = [\Lambda, \Lambda]$, $\Lambda_2 = [\Lambda, \Lambda_1], \dots, \Lambda_j = [\Lambda, \Lambda_{j-1}]$.

Тогда все элементы Λ_i равны нулю при $x = \xi = 0$.

Теорема 3 доказывается с помощью аналогичных построений на основе двух следующих лемм.

Лемма 3. Пусть $b(x, \xi) \geq 0$ (≤ 0) при $\xi_1 = 0$ и $\frac{\partial^j b(x^0, \xi^0)}{\partial x_1^j} = 0$ при $j < k$. Тогда

$$\text{grad}_{x, \xi} \frac{\partial^s b(x^0, \xi^0)}{\partial x_1^s} = 0 \quad (2)$$

при $i < k/2$.

Лемма 3 доказана в (7).

Лемма 4. Пусть Λ — линейное пространство, порожденное одночленами $\xi_1, x^\alpha \xi^\beta$ при $|\alpha + \beta| \geq 2$, причем среди образующих отсутствуют члены вида $x_1^{\alpha_1}$ при $\alpha_1 \leq l$ и $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \xi_j$ при $\beta_1 < l/2$, $j = 1, \dots, n$.

Тогда все элементы Λ_i равны нулю при $x = \xi = 0$.

Для того чтобы вывести теорему 3 из лемм 3 и 4, достаточно заметить, что в силу условия А либо $a_2(x, \xi)$ не меняет знака при $\xi_1 = 0$, либо, если знак $a_2(x, \xi)$ меняется, то многообразие S можно с помощью канонического преобразования совместить с плоскостью $x_1 = 0$, так что функция $x_1 a_2(x, \xi)$ не будет менять знак при $\xi_1 = 0$. Лемма 4 показывает также, что теорема 3 выполняется для более широкого класса операторов P , а именно, для тех, у которых в точке (x^0, ξ^0) выполнено условие (2) (для $b = a_2(x, \xi)$).

В общем случае доказательство теоремы 2 более сложно, поскольку, как видно из приведенного примера, условие (2) может не выполняться.

Однако можно показать, что если выполнено условие А и $\frac{\partial^{s+1} a_2(x^0, \xi^0)}{\partial x_1^s \partial x_2} \neq 0$

при некотором $s < l/2$, то остальные производные $(\partial / \partial x_3, \dots, \partial / \partial x_n; \partial / \partial \xi_2, \dots, \partial / \partial \xi_n) \partial^s a_2(x^0, \xi^0) / \partial x_1^s$ равны нулю при $i < l/2$. Теорема 2 доказывается теперь с помощью следующей леммы.

Лемма 5. Пусть Λ — линейное пространство, порожденное одночленами $\xi_1, \{x^\alpha \xi^\beta\}$ при $|\alpha + \beta| \geq 2$, причем среди образующих алгебры отсутствуют члены вида $x_1^{\alpha_1}$ при $\alpha_1 \leq l$; $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}$ при $\beta_1 + \beta_2(s+1) \leq l$, $x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2}$ при $\gamma < s$; $x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \xi_t$ при $\delta < l/2$, $s = 3, \dots, n$, $t = 2, \dots, n$; $x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \xi_s$ при $\epsilon < s$; $x_1^{\zeta_1} x_2^{\zeta_2} \xi_s$ при $\zeta_1 + \zeta_2(s+1) < l/2$.

Тогда все элементы Λ_i равны нулю при $x = \xi = 0$.

Из леммы 5 следует, что для субэллиптического оператора с символом вида $i \xi_1 + a_2(x, \xi)$ такого, что $\partial^{s+1} a_2(x^0, \xi^0) / \partial x_1^s \partial \xi_2 \neq 0$ при некотором $s < k/2$, отличное от нуля значение коммутатора получается после многократного применения операторов D_1 и $x_1^s D_2$ к одночленам вида $x_1^i x_2^j$ с $i + j(s+1) = l$, участвующим в разложении функции $a_2(x, \xi)$ по формуле Тейлора. Это позволяет проследить судьбу одночленов такого вида при применении операторов вида $H_1^j H_2^s$ с $|\alpha| = l - j$, $|\beta| = j$ и доказать тем самым теорему 2. При этом мы можем уточнить число исключительных значений θ : оно не превышает наибольшего значения j у таких одночленов с ненулевыми коэффициентами.

6. Для полноты изложения упомянем еще один результат, доказанный независимо и разными способами в ⁽³⁾ и ⁽⁴⁾, в связи с исследованием необходимых условий разрешимости.

Теорема 4. Если $c_1^0(x, \xi) \leq 0$ во всех характеристических точках $(x, \xi) \in T^*(\Omega)$, $k = k_0(x^0, \xi^0)$ — нечетное число и $H_2^k a_1(x^0, \xi^0) > 0$, то $k_0(x^0, \xi^0) = k_1(x^0, \xi^0) = k_2(x^0, \xi^0)$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
13 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ L. Hörmander, Ann. Math., 83, № 1, 429 (1966). ² L. Nirenberg, F. Trèves, Comm. Pure and Appl. Math., 16, 331 (1963). ³ L. Nirenberg, F. Trèves, ibid., 23, 1 (1970). ⁴ Ю. В. Егоров, ДАН, 187, № 6, 1232 (1969). ⁵ Ю. В. Егоров, ДАН, 188, № 1, 20 (1969). ⁶ Ю. В. Егоров, Матем. сборн., 82, № 3, 323 (1970). ⁷ Ю. В. Егоров, Диссертация, МГУ, 1970.