

УДК 517.944/947

МАТЕМАТИКА

В. М. БАБИЧ

# ОБ АСИМПТОТИКЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА НЕКОТОРЫХ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 3 II 1971)

Пусть  $\mathcal{D}$  — бесконечная область из плоскости  $x, y$ , граница которой  $S$  — выпуклая достаточно гладкая замкнутая кривая с кривизной, везде отличной от нуля.

Теорема 1. Пусть  $W$  — дважды непрерывно дифференцируемое в  $\mathcal{D} + S = \mathcal{D}$  решение задачи Неймана

$$(\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + k^2) W = (\Delta + k^2) W = -f; \quad (1)$$

$$\partial W / \partial n|_S = \varphi; \quad (2)$$

$$W = O(1/\sqrt{r}), \quad \sqrt{r}(\partial W / \partial r - ikW) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (3)$$

тогда в любой точке  $M = s \in S$

$$|W(s)| \leq \frac{\max |\varphi|}{\sqrt{k}} C_1 + \left( \sup \frac{|f|}{\sqrt{k}} + \iint_{\mathcal{D}} \frac{|f|}{\sqrt{r}} dx dy \right) C_2. \quad (4)$$

Положительные константы зависят только от кривой  $S$ .

Из неравенства (4), пользуясь формулами (1) — (3) и классическим интегральным представлением Грина — Гальмгольца для  $W$ , нетрудно доказать оценку для  $W$  во внутренних точках области.

Теорема 2. Функция  $W(M)$  удовлетворяет неравенству

$$|W(M)| \leq \max |\varphi| \frac{C_3}{\sqrt{r}} + \left( \max |f| + \sqrt{k} \iint_{\mathcal{D}} \frac{f(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{\sqrt{r_1}} \right) \frac{C_4}{\sqrt{r}} + \frac{1}{4} \left| \iint_{\mathcal{D}} H_0^{(1)}(kr_1) f(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \right|, \quad (5)$$

$$M \in \mathcal{D}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

(константы  $C_3$  и  $C_4$  зависят только от контура  $S$ ).

Несмотря на грубость оценки (5), она оказывается достаточной для обоснования некоторых формул геометро-оптического приближения. Пусть  $u(M, M_0, k)$  — функция Грина, соответствующая краевому условию Неймана,

$$u = u_s + u_r = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|MM_0|) + u_r, \quad r = |MM_0|, \quad (\Delta + k^2)u_r = 0; \quad (6)$$

$$\partial u / \partial n|_S = 0; \quad (7)$$

$$\sqrt{r}(\partial u / \partial r - iku) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \quad (8)$$

В работах <sup>(2, 3)</sup> оправданы главные члены геометро-оптического приближения для  $u$ . Лучевой ряд обосновал Гримшоу <sup>(4)</sup>, в ряде работ были получены оценки для  $u$  в зоне тени, однако для полутени (т. е. для окрестности полупрямых, отделяющих часть  $\mathcal{D}$ , освещенную из точки  $M_0$ , от за-

тененной части) асимптотика и изучена не была. Оценка (5) позволяет заполнить этот пробел.

Обозначим через  $u_{rL}^N$  приближенное (для больших  $k$ ) выражение для  $u_r$ , построенное с помощью приемов Д. Людвига (см. (5, 6)). Имеют место следующие оценки:

$$(\Delta + k^2) u_{rL}^N = O(k^{-N+2} r^{-1/2-2}), \quad u_{rL}^N = O(1/\sqrt{kr}), \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r \rightarrow \infty, \\ \frac{\partial}{\partial r} u_{rL}^N - iku_{rL}^N = O\left(\frac{1}{\sqrt{kr^{3/2}}}\right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k | M M_0 |) + u_{rL}^N \right) = O(k^{-N/3+1/2}).$$

Обозначая через  $W_N$  разность между  $u$  и  $u_{rL}^N \equiv \frac{i}{4} H_0^{(1)} + u_{rL}^N$  и пользуясь теоремой 2, получаем

$$|W_N| \leq \frac{C_5}{\sqrt{r}} k^{-N/3+1/2}. \quad (10)$$

Асимптотика  $u_L^N$  в освещенной области  $N$  — это обычное геометрико-оптическое разложение для  $u(M, M_0, k)$ , поэтому формула (10) дает новое доказательство того известного (4) факта, что лучевой ряд для  $u$  является асимптотическим разложением этой функции. Кроме того, соотношение

$$u = u_L^N + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}} k^{-N/3+1/2}\right) \quad (11)$$

полностью характеризует поведение  $u$  в полутени при  $k \rightarrow \infty$ .

Теорема 2 дает возможность строго оправдать геометрико-оптическое приближение к решению задачи (1):

$$(\Delta + k^2) v = 0, \quad \partial v / \partial n|_S = F, \quad \sqrt{r} (\partial v / \partial r - i k v) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Геометро-оптическое приближение к решению этой задачи известно (7): проводятся нормали к каждой точке границы  $S$ . Они играют роль лучей. Им соответствует эйконал  $\tau(M)$ , геометрический смысл которого — расстояние до  $S$ , а дальше лучевой ряд строится с помощью обычных приемов. Разность между  $v$  и  $v_N$  (суммой  $N$  членов лучевого ряда) оценивается с помощью теоремы 2:

$$v - v_N = O(k^{-N-1/2} / \sqrt{r}).$$

Методы работ (1-3) позволяют доказать ряд оценок для  $u$ , важных для нестационарной задачи:

$$|u_r(M, M_0, k)| \leq C_6 e^{-\text{Im } k d} \frac{1}{\sqrt{r}}, \quad \text{Im } k \geq 0, \quad d = \min_{s \in S} |M_0 s|; \quad (12)$$

$$\left| \frac{\partial^{p+\gamma} u_*(s, M_0, k)}{\partial k^p \partial s^\gamma} \right| \leq C_7^{p, \gamma} \left\{ |k|^{-p+\gamma/3-1/2} \right. \quad (13')$$

$$\left. |k|^{-p+\gamma/3-1/2} \exp(-|k|^{1/3} C_8 \sigma) \exp(-|k|^{1/3} C_9^{p, \gamma}) \right\}; \quad (13'')$$

$$p, \gamma = 0, 1, 2, \dots, s = M \in S, \quad |\text{Im } k| \leq c_{10}, \quad |\text{Re } k| \geq C_{11},$$

$$u(s, M_0, k) = e^{i\tau(M_0 s)} u_*;$$

здесь все  $C_i > 0$ ,  $C_{10}$  задается произвольно, константа  $C_{11}$  определяется константой  $C_{10}$ :  $C_{11} = C_{11}(C_{10})$ .

Оценка (13') относится к части  $S$ , освещенной из  $M_0$ , оценка (13'') — к затемненной.

Пользуясь приведенными здесь результатами для  $u$ , нетрудно показать, что

$$v(M, M_0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikt} u(M, M_0, k) dk \quad (14)$$



(интеграл здесь символический:  $v$  равно образу по Фурье от  $u(M, M_0, k)$ , понимаемому в смысле обобщенных функций) является функцией Грина волнового уравнения, т. е.

$$v_n - \Delta v = \delta(M - M_0) \delta(t); \quad (15)$$

$$v|_{t=0} = 0; \quad (16)$$

$$\partial v / \partial n|_S = 0. \quad (17)$$

Решение задачи (15) — (17) понимается в следующем смысле:

1) при  $t < d = \inf_{s \in S} |M_0 s|$  функция  $v$  есть фундаментальное решение задачи Коши для волнового уравнения,

$$v = \frac{1}{2\pi} (t^2 - |M M_0|^2)_+^{-1/2} \theta(t);$$

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0; \end{cases} \quad \theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0; \end{cases}$$

2) при  $t > 0$   $v$  — обобщенная функция  $t$ , зависящая от  $M_0 (\in \mathcal{D})$  и  $M (\in \mathcal{D} \cup S)$  как от параметров, дважды непрерывно дифференцируемая, как функция  $M$  в  $\mathcal{D} + S$  и удовлетворяющая однородному волновому уравнению ( $t > 0$ !) и краевому условию (17).

Подставляя в (14) вместо  $u$  его интегральное представление по формуле Грина через интеграл, содержащий функцию Ханкеля  $H_0^{(1)}(kr)$ , и пользуясь оценками (13'), (13''), нетрудно показать, что  $v(M, M_0, t) \in C^\infty$  всюду, кроме фронтов падающей и отраженной волн, причем особенности ее даются обычным лучевым рядом. Сформулированный только что результат также можно получить и с помощью некоторой модификации методов работы (4).

Энергетические соображения позволяют легко доказать, что  $v(t, M, M_0)$  равна нулю всюду, кроме области, ограниченной  $S$  и волновыми фронтами. Перейдем к изучению  $v(t, M, M_0)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Хорошо известно (см., например, (9)), что функция  $u$  аналитически продолжима по  $k$  на риманову поверхность логарифмического типа и не имеет на ней особенностей, кроме полюсов. В верхней полуплоскости нулевого листа римановой поверхности полюсов нет. Можно доказать (10), что их нет и в нижней полуплоскости при  $0 \geq \operatorname{Im} k \geq -\varepsilon |\operatorname{Re} k|^{1/2}$  ( $\varepsilon > 0$  — малая константа).

Проведем разрез вдоль отрицательной части мнимой оси и заменим (следуя, по существу, работе (11)) в формуле (14) интегрирование по вещественной оси интегрированием (1) по полупрямой  $-ai - \infty, -ai$ ; (2) двум отрезкам  $(-ai, -0)$  и  $(+0, ai)$ , огибающим разрез; (3) по полупрямой  $(-ai, -ai + \infty)$ . (Константу  $a > 0$  можно выбрать столь малой, что выше контура полюсов функции  $u$  не будет.) Нетрудно видеть, что главный вклад в рассматриваемый интеграл при  $t \rightarrow +\infty$  даст интегрирование по окрестности точки  $k = 0$ . Используя результаты работы (12) о поведении функции  $u(M, M_0, k)$  при  $k \rightarrow 0$ , мы приходим к следующему результату.

**Теорема 3.** Функция Грина  $v(M, M_0, t)$  при  $t \rightarrow \infty$  имеет асимптотику

$$v \sim \frac{1}{2\pi} (t^2 - r^2)^{-1/2} + \sum_{\substack{m \geq 1 \\ n \geq 1}} a_{mn}(M, M_0) t^{-2m-2n-1} (\ln t)^{n-1}, \\ a_{-11} = 0, \quad a_{01} = a_{01}(M_0). \quad (18)$$

Оценка остаточного члена равномерна, если  $M$  меняется в заданном компакте  $K \subset \mathcal{D}$ . Порядок остаточного члена при  $t \rightarrow \infty$  равен порядку (при  $t \rightarrow +\infty$ ) главного из отброшенных членов.

Следствием построений настоящей работы является также справедливость принципа предельной амплитуды для стационарной функции Грина и. Точнее, имеет место

Теорема 4. Пусть  $U$  — решение задачи

$$\begin{aligned} U_{tt} - \Delta U &= \delta(x - x_0, y - y_0) e^{-ik_0 t}, \quad k_0 > 0, \\ U|_{t=0} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} U = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда при  $t \rightarrow +\infty$

$$U = e^{-ik_0 t} u(M, M_0, k_0) + O(1/t). \quad (20)$$

Здесь  $O$  равномерное, если точка  $M_0$  фиксирована, а  $M$  не покидает фиксированного компакта  $\subset \mathcal{D}$ . Для остаточного члена можно выписать асимптотическое разложение, аналогичное разложению (18).

Заметим, что обоснованию принципа предельной амплитуды посвящено довольно много работ. В этих работах либо рассматривается трехмерный случай и краевое условие  $v/s = 0$  (к нашей задаче см. <sup>(13, 14)</sup>), либо для остаточного члена не удается получить хорошей оценки <sup>(15)</sup>.

В заключение работы считаю приятным долгом выразить благодарность Б. Р. Вайнбергу, А. Ф. Филиппову за ценные консультации и Н. Н. Петрову, С. Е. Пономареву за помощь в работе.

Примечание при корректуре. После того, как работа была сдана в печать, автору стала известна заметка <sup>(16)</sup>, содержащая ряд теорем о поведении решений волнового уравнения при  $t \rightarrow \infty$ , во многом близких нашей теореме 3.

Ленинградское отделение  
Математического института им. В. А. Стеклова  
Академии наук СССР

Поступило  
6 I 1971

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> F. Ursell, Proc. Cambr. Phil. Soc., 53, № 1, 115 (1957). <sup>2</sup> В. М. Бабич, ДАН, 146, № 3, 571 (1962). <sup>3</sup> В. М. Бабич, Матем. сборн., 65 (107), № 4, 576 (1964).
- <sup>4</sup> R. Grimshaw, Comm. on Pure and Appl. Math., 19, № 2, 167 (1966). <sup>5</sup> D. Ludwig, ibid., 20, № 1, 103 (1967). <sup>6</sup> C. S. Morawetz, D. Ludwig, ibid., 21, № 2, 111 (1968). <sup>7</sup> В. Д. Андронов, Диссертация, ЛГУ, 1965. <sup>8</sup> C. S. Morawetz, D. Ludwig, Comm. on Pure and Appl. Math., 22, № 2, 189 (1969). <sup>9</sup> H. Reichardt, Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 24, 41 (1960). <sup>10</sup> В. М. Бабич, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, в. 3, Л., 1966, стр. 151. <sup>11</sup> О. А. Ладженская, УМН, 11, в. 3 (75) (1957). <sup>12</sup> R. C. MacCamy, Quart. Appl. Math., 23, № 3, 247 (1965). <sup>13</sup> C. S. Morawetz, Comm. on Pure and Appl. Math., 15, № 3, 349 (1962). <sup>14</sup> E. Zachmanoglou, Arch. Rational Mech. and Anal., 14, № 4, 312 (1963). <sup>15</sup> N. D. Kazarinoff, R. K. Ritt, ARMA, 4, № 2, 177 (1960). <sup>16</sup> Л. А. Муравей, ДАН, 193, № 5, 996 (1970).