Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 5

УДК 517.949.21+519.35+62—50

МАТЕМАТИКА

Ю. П. ИВАНИЛОВ, А. И. ПРОПОЙ

О ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 16 XII 1970)

1. Рассмотрим процесс, который описывается уравнением вида

$$x(k+1)=A(k)x(k)+B(k)u(k)-s(k) \quad (k=0,\ 1,\ldots,N-1), \quad (1)$$
$$x(0)=x^0,$$

где вектор $x(k)=\{x_1(k),\ldots,x_n(k)\}$ определяет состояние процесса на k-м шаге, $u(k)=\{u_1(k),\ldots,u_r(k)\}$ — управляющие воздействия, $s(k)=\{s_1(k),\ldots,s_n(k)\}$ — внешнее возмущение. Матрицы $A(k)$, $B(k)$ имеют размер $(n\times n)$ и $(n\times r)$ соответственно.

На переменные состояния и управления наложены ограничения

$$G(k)x(k)+D(k)u(k)\geqslant h(k),\quad u(k)\geqslant 0 \quad (k=0,\ 1,\ldots,N-1), \quad (2)$$

где $G(k)$, $D(k)$ — матрицы размера $(m\times n)$ и $(m\times r)$ соответственно. Число шагов N считается фиксированным. Качество процесса оценивается критерием вида

$$I_1=(c,x(N)). \quad (3)$$

Назовем последовательность $u=\{u(0),\ldots,u(N-1)\}$ *управлением*, а соответствующую ему в силу (1) последовательность $x=\{x(0),\ldots,x(N-1)\}$ *траекторией процесса*. Последовательности $\{u,x\}$, удовлетворяющие ограничениям (1), (2), *допустимы*.

Задача 1. Найти такое допустимое управление u и соответствующую ему траекторию x, для которых значение I максимально.

Оптимальное значение показателя качества в задаче 1 обозначим через I_1^*. Задачу 1 назовем задачей динамического линейного программирования в канонической форме.

2. Введем функцию Лагранжа для задачи 1:

$$L(x,u,p,\lambda)=(c,x(N))+(p(0),x^0-x(0))+\sum_{k=0}^{N-1}(p(k+1),A(k)\,x(k)+$$
$$+B(k)u(k)-s(k)-x(k+1))+\sum_{k=0}^{N-1}(\lambda(k),G(k)x(k)+D(k)u(k)-h(k)). \quad (4)$$

Здесь $p(k)=\{p_1(k),\ldots,p_n(k)\}$, $k=0,\ 1,\ldots,N$, — множители Лагранжа для ограничений (1), $\lambda(k)=\{\lambda_1(k),\ldots,\lambda_m(k)\}$, $k=0,\ 1,\ldots,N-1$, — множители Лагранжа для ограничений (2); предполагается, что $\lambda_i(k)\geqslant 0$. Построим следующие задачи:

$$\sup_{x,\,u\geqslant 0}\ \inf_{p,\,\lambda\geqslant 0} L(x,u,p,\lambda)=I_{11}; \quad (1,1)$$

$$\sup_{x}\inf_{p}\sup_{u\geqslant 0}\inf_{\lambda\geqslant 0} L(x,u,p,\lambda)=I_{12}; \quad (1,2)$$

$$\inf_{p,\,\lambda\geqslant 0}\ \sup_{x,\,u\geqslant 0} L(x,u,p,\lambda)=I_{22}; \quad (2,2)$$

$$\inf_{p}\sup_{x}\inf_{\lambda\geqslant 0}\sup_{u\geqslant 0} L(x,u,p,\lambda)=I_{21}. \quad (2,1)$$

Рассмотрим каждую из задач в отдельности.

Лемма 1. *Любое решение $\{x^*, u^*\}$ задачи 1 является решением задачи (1,1), причем $I_1^* = I_{11}$. Если $I_{11} > -\infty$, то любое решение задачи 1,2 является решением задачи 1; если же $I_{11} = -\infty$, то система ограничений (1), (2) противоречива.*

Доказательство леммы следует из того, что функция $\varphi(x, u) = \inf\limits_{p,\,\lambda \geqslant 0} L(x, u, p, \lambda) = (c, x(N))$ для допустимых $\{x, u\}$; $\varphi(x, u) = -\infty$ в противном случае.

Перепишем функцию Лагранжа (5) в виде

$$L(x, u, p, \lambda) = (c - p(N), x(N)) + \sum_{k=N-1}^{0} (A^T(k)p(k+1) + G^T(k)\lambda(k) - p(k), x(k)) + \sum_{k=N-1}^{0} (B^T(k)p(k+1) + D^T(k)\lambda(k), u(k)) - \sum_{k=N-1}^{0} (p(k+1), s(k)) - \sum_{k=N-1}^{0} (\lambda(k), h(k)) + (p(0), x^0). \tag{5}$$

Вводя функцию $\psi(p, \lambda) = \sup\limits_{x,\, u \geqslant 0} L(x, u, p, \lambda)$ и повторяя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 1, для функции (5) получим, что задача 2,2 эквивалентна следующей задаче.

Задача 2. Найти последовательность $\lambda = \{\lambda(N-1), \ldots, \lambda(0)\}$, удовлетворяющую ограничениям

$$B^T(k)p(k+1) + D^T(k)\lambda(k) \leqslant 0, \quad \lambda(k) \geqslant 0 \quad (k = N-1, \ldots, 1, 0), \tag{6}$$

которая в силу уравнений движения

$$p(k) = A^T(k)p(k+1) + G^T(k)\lambda(k) \quad (k = N-1, \ldots, 1, 0) \quad p(N) = c, \tag{7}$$

доставляет показателю качества

$$I_2 = (p(0), x^0) - \sum_{k=N-1}^{0} (p(k+1), s(k)) - \sum_{k=N-1}^{0} (\lambda(k), h(k)) \tag{8}$$

минимальное значение. При этом $I_{22} = I_2^*$, где I_2^* — оптимальное значение показателя качества в задаче 2.

Назовем, пока формально, задачи 1, 2 парой двойственных задач (где задача 1 — прямая, задача 2 — двойственная) и рассмотрим задачи 1,2; 2,1.

Введем функцию Гамильтона для прямой задачи при $k = 0, 1, \ldots, N-1$:

$$H_1(p(k+1), u(k)) = (p(k+1), B(k)u(k)). \tag{9}$$

Можно показать, что задача 1.2 эквивалентна задаче 1а.

Задача 1а. Найти последовательности $\{x^*, u^* \geqslant 0\}$ и $\{p^*, \lambda^* \geqslant 0\}$, удовлетворяющие ограничениям (2) и уравнениям (1) и (7), для которых

$$\max_{u(k) \geqslant 0} H_1(p^*(k+1), u(k)) = H_1(p^*(k+1), u^*(k)), \tag{10}$$

где $\lambda^*(k)$ — двойственные переменные для задачи линейного программирования (10), (2).

Введем теперь функцию Гамильтона для двойственной задачи при $k = N-1, \ldots, 0$:

$$H_2(\lambda(k), x(k)) = -(\lambda(k), h(k)) + (\lambda(k), G(k)x(k)). \tag{11}$$

Задача 2,1 эквивалентна задаче 2а.

Задача 2а. Найти последовательности $\{p^*, \lambda^* \geqslant 0\}$ и $\{x^*, u^* \geqslant 0\}$, удовлетворяющие ограничениям (6) и уравнениям (7) и (1), для которых

$$\min_{\lambda(k)\geqslant 0} H_2(\lambda(k), x^*(k)) = H_2(\lambda^*(k), x^*(k)), \tag{12}$$

где $u^*(k)$ — двойственные переменные для задачи линейного программирования (12), (6).

Установим теперь соотношения между задачами 1,1—1,2. Из теории игр следует

$$I_{11} \leqslant I_{12} \leqslant I_{21} \leqslant I_{22}. \tag{13}$$

Используя свойства выпуклости линейной задачи 1, можно показать, что справедлива следующая теорема двойственности.

Теорема. *Если одна из задач двойственной пары* (1) — (3), (6) — (8) *имеет решение, то и другая разрешима. При этом для любых оптимальных решений* u^*, λ^* *этих задач справедливо*

$$I_1^* = I_{11} = I_{22} = I_2^*. \tag{14}$$

Следствие 1.

$$I_{11} = I_{12} = I_{21} = I_{22}. \tag{15}$$

Следствие 2.

$$H_1(p^*(k+1), u^*(k)) = H_2(\lambda^*(k), x^*(k)) \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1), \tag{16}$$

где H_1, H_2 *— оптимальные значения функций Гамильтона соответственно для прямой и двойственных задач* 1, 2.

Из (16) видно, что разность $\Delta(k) = H_1(p(k+1), u(k)) - H_2(\lambda(k), x(k))$ можно использовать для оценки близости приближения к оптимальному решению. Двойственная задача 2 является задачей оптимального управления, в которой управляющими воздействиями являются переменные $\lambda(k)$, сопряженные (двойственные) переменные $p(k)$ определяют состояние двойственной системы (7) на шаге k. «Время» в двойственной системе направлено в обратную сторону. Задачи 1а, 2а могут интерпретироваться как необходимые и достаточные условия оптимальности для задач 1 и 2 (соответственно принцип максимума для прямой задачи 1 и принцип минимума для двойственной задачи 2). При этом роль сопряженной системы для задачи 2 играет прямая система (1) и наоборот.

3. Задачам динамического линейного программирования 1, 2 можно дать каноническую экономическую интерпретацию. Пусть в системе имеется n связанных между собой производств с вектором мощностей $x(k) = \{x_i(k)\}$ на шаге k. Мощности на каждом шаге преобразуются с матрицей преобразования $A(k) = \{a_{ij}(k)\}$. Часть из них $s(k) = \{s_i(k)\}$ выбывает вследствие заданного износа или продажи. Существует r технологий создания новых мощностей, интенсивности которых обозначим через $u(k) = \{u_j(k)\}$. При единичной интенсивности j-й технологии на этом шаге создается $\{b_{ij}(k)\} = B(k)$ единиц i-й мощности. Уравнение (1) описывает при такой интерпретации динамику изменения производственных мощностей. Производство выпускает m видов продуктов, которые должны быть поставлены потребителю в количествах, не меньших $h(k) = \{h_l(k)\}$. Единица i-й мощности производит $\{g_{li}(k)\} = G(k)$ единиц l-го продукта, а единица j-й технологии сооружения новых мощностей потребляет $D(k) = \{d_{lj}(k)\}$ единиц того же продукта. Ограничения (2) ограничивают создание новых мощностей из-за обязательных поставок продукции. Предприятие стремится максимизировать суммарную мощность системы (3) при выполнении обязательных поставок.

Имеется орган, назначающий цены $p(k) = \{p_i(k)\}$ за единицу i-й мощности и $\lambda(k) = \{\lambda_l(k)\}$ за поставленную потребителю продукцию. Уравнение (7) означает, что цена единицы i-й мощности на шаге k равна стоимости $A^T(k)p(k+1)$ тех мощностей, в которые она преобразуется на следующем шаге, плюс доход $G^T(k)\lambda(k)$ от поставок продукции, произведенных этой единицей мощности на шаге k. Равенство $p(N)=c$ определяет цену мощностей в конце процесса, а второе из неравенств (6) — условие неотрицательности цен. Первое из неравенств (6) означает, что стоимость мощностей $B^T(k)p(k+1)$, сооружаемых по любой из технологий, не должна превышать прибыли $-D^T(k)\lambda(k)$, которую предприятие получило бы от продажи затрачиваемой на эти цели продукции потребителю. Без этого условия предприятие не поставило бы потребителю продукцию. Затраты потребителя на приобретение начальных мощностей равны $(p(0), x^0)$. Из них ему возвратятся прибыли от обязательной продажи мощностей $\sum_{k=0}^{N-1}(p(k+1), s(k))$ и от поставок полученной за время работы продукции $\sum_{k=0}^{N-1}(\lambda(k), h(k))$. Таким образом, полные затраты предприятия определяются значением функционала (8), а общая стоимость мощностей предприятия в конце процесса — значением функционала (3). Так как $I_1 \leqslant I_2$, то работа предприятия, вообще говоря, убыточна. Однако, если цены назначены так, чтобы минимизировать затраты предприятия I_2, то работая оптимально (максимизируя I_1), оно может сделать в таких ценах свою работу безубыточной: $I_1^* = I_2^*$. Принцип максимума означает, что при указанном назначении цен предприятию нет нужды планировать свою деятельность на весь период, достаточно на каждом шаге максимизировать стоимость сооружаемых предприятий $(p^*(k+1), B(k)u(k))$ при выполнении обязательных поставок. Принцип минимума означает, что для оптимизации работы предприятия надо так назначать цены $\lambda(k)$, чтобы стоимость произведенной им продукции $(\lambda(k), G(k)x^*(k))$ была минимальна на каждом шаге. Равенство (16) показывает, что на каждом шаге вся стоимость произведенной продукции реализуется в стоимости вновь сооруженных мощностей.

4. Полученные результаты являются основой для построения численных методов решения задач динамического линейного программирования, которые могут быть конечными или итеративными. Эти результаты и связь принципа максимума с минимаксными задачами могут быть распространены на задачи квадратичного и выпуклого динамического программирования и на задачи управления линейными непрерывными процессами. Для задач нелинейного динамического программирования можно построить примеры, когда $I_{11} < I_{12}$ (принцип максимума не справедлив), или когда $I_{11} < I_{22}$ (функционал двойственной задачи только мажорирует функционал прямой).

Поступило
10 XII 1970