Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 5

УДК 539.12.01.12:517.933.2 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

Академик АрмССР **А. Г. ИОСИФЬЯН, Н. П. КОНОПЛЕВА**

ОБ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Изопериметрические задачи — это задачи на отыскание условного экстремума некоторого функционала S в том случае, когда дополнительным условием при варьировании является сохранение другого функционала S_1, т. е. когда дополнительные условия являются интегральными. В данной работе показано, что ряд вариационных задач в теории поля можно рассматривать как изопериметрические. К ним относятся, например, переход от системы невзаимодействующих дираковских полей к системе с взаимодействием, а также переход от безмассовых калибровочных полей к массивным.

Введение взаимодействия через условный экстремум позволяет связать величину константы взаимодействия (а в случае калибровочных полей — массу поля) с некоторым интегральным инвариантом S_1, характеризующим систему в целом. Константа взаимодействия и масса калибровочного поля играют в этом случае роль множителей Лагранжа и выражаются через S_1. Поскольку S_1 включает интегрирование, тем самым показывается, что такие характеристики, как константы взаимодействия и массы, неявно учитывают глобальную структуру пространства — времени и поля.

Теоремы Нётер ([1]) (первая и вторая) обобщаются на изопериметрические задачи, причем показано, что в вариационных задачах на условный экстремум первая теорема определяет вид законов «несохранения» токов, а вторая теорема — вид дифференциальных дополнительных условий на экстремали. При этом вид получаемых условий на экстремали (в случае калибровочных полей — условий типа Лоренца) определяется тождествами Нётер для соответствующей обычной вариационной задачи (без дополнительных интегральных условий).

2. Рассмотрим следующую вариационную задачу: найти экстремум функционала

$$s = \int_{V_4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a dV,$$

($F_{\mu\nu}{}^a = \partial_{[\mu} A^a{}_{\nu]} - {}^1/_2 f_{bc}{}^a A^b{}_{[\mu} A^c{}_{\nu]}$ — тензор напряженности калибровочного поля; $A_\mu{}^a$ — вектор-потенциал этого поля) при условии, что другой функционал

$$S_1 = \int_{V_4} A^a_\mu A^\mu_a dV = b = \text{const} \neq 0. \tag{1}$$

Здесь $a = 1, \ldots, r$, где r — число параметров калибровочной группы $\mu = 1, \ldots, 4$ — пространственно-временные индексы. V_4 будем считать конечной областью.

Согласно общему правилу, необходимо составить вспомогательный функционал

$$S_2 = S + \lambda S_1 = \int_{V_4} (F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a + \lambda A^a_\mu A^\mu_a)\, dV \tag{2}$$

и найти его экстремум. Найденная экстремаль будет также экстремалью для S, удовлетворяющей условию (1). Постоянные интегрирования и константа λ находятся затем из граничных условий и дополнительного условия (1). Постоянную λ можно отождествить с квадратом массы калибровочного поля $-m^2$. Тогда S_2 окажется действием для массивного калибровочного поля, причем масса будет иметь смысл множителя Лагранжа. Подобная интерпретация массы иногда используется в классической механике.

Экстремали, соответствующие $\delta S_2 = 0$, имеют вид

$$F^{\mu\nu}_{a\,;\nu} - m^2 A^{\mu}_a = 0. \tag{3}$$

Эта система экстремалей не изменится, если представить ее в виде

$$\frac{1}{m^2} F^{\mu\nu}_{a\,;\nu} - A^{\mu}_a = 0. \tag{4}$$

Экстремали (4) можно теперь рассматривать как экстремали, соответствующие вариации функционала от тех же переменных:

$$S_1 = \int\limits_{V_4} A^a_\mu A^\mu_a \, dV$$

при дополнительном условии

$$S = \int\limits_{V_4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a \, dV = a = \text{const}. \tag{5}$$

Величина S определяет величину $1/m^2$. Интеграл S представляет собой интеграл от инвариантов поля (типа $(E^2 - H^2)$ в электродинамике), взятый по четырехмерной области, в которой существует поле. Его величина определяется не только самими инвариантами, но и топологией V_4. Если гравитационное поле рассматривается как калибровочное, то (5) переходит в

$$S = \int\limits_{V_4} R_{\mu\nu\tau\lambda} R^{\mu\nu\tau\lambda} \, dV, \tag{6}$$

где $R_{\mu\nu\tau\lambda}$ — тензор кривизны Римана. Интеграл (6) непосредственно определяется топологическими инвариантами V_4.

Аналогичная ситуация возникает и в отношении констант взаимодействия частиц с калибровочным полем. Именно, появление взаимодействия с калибровочным полем можно рассматривать с тех же позиций, что и появление массового члена, т. е. как замену задачи на безусловный экстремум для свободного лагранжиана (или безмассового) задачей на условный экстремум с интегральными дополнительными условиями. Тогда уравнения Дирака с взаимодействием

$$\gamma^\mu (\partial_\mu \psi - i\varepsilon \underset{a}{I} A^a_\mu \psi) - m\psi = 0 \tag{7}$$

дают экстремум функционалу

$$S_3 = \int (\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi) \, dV$$

при дополнительном условии

$$S_4 = \int J^a_\mu A^\mu_a dV = \text{const} \neq 0. \tag{8}$$

Константа взаимодействия (заряд) играет роль множителя Лагранжа и определяется значением S_4. В то же время уравнение (7) дает экстремум функционалу

$$S_4 = \int J^\mu_a A^a_\mu dV = \int \bar{\psi}\gamma^\mu \underset{a}{I} \psi A^a_\mu dV$$

при дополнительном условии

$$S_3 = \int (\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi) \, dV = \text{const}. \tag{9}$$

В этом случае константа взаимодействия определяется через постоянное значение S_3, причем перенормировка константы взаимодействия соответствует изменению значения интеграла действия для свободных («голых») частиц.

Таким образом, переход от безмассового калибровочного поля к массивному, а также и переход от свободных дираковских частиц к взаимодействующим можно представить как переход от вариационной задачи на безусловный экстремум к требованию экстремальности того же интеграла действия при дополнительных интегральных условиях типа (1), (5), (8) или (9).

Аналогичный метод был использован одним из авторов ([2]) для описания с помощью принципа действия нелинейных процессов в электрических цепях.

3. Для изопериметрических задач общего вида, в которых исходный функционал инвариантен относительно бесконечной группы $G_{\infty r}$, можно указать общий вид дополнительных условий на экстремали, вытекающих из тождеств Нётер ([3]). В самом деле, пусть

$$S = \int L\, dV = \int L(x, u, u')\, dV$$

(u — полевые переменные, L — лагранжиан) инвариантен относительно $G_{\infty r}$, преобразования которой содержат (для простоты) лишь первые производные от параметрических функций, и пусть

$$S_1 = \int L_1 dV = \mathrm{const}$$

инвариантен относительно G_r, получаемой из $G_{\infty r}$ при $\varepsilon^a(x) = \mathrm{const}$.

Тогда можно утверждать, что на своих экстремалях

$$S_2 = S + \lambda S_1 = \int (L + \lambda L_1)\, dV = \int L_2 dV$$

инвариантен относительно $G_{\infty r}$, причем L_2 сдвигается под действием $G_{\infty r}$ на полную дивергенцию, а G_r оставляет L_2 без изменения.

Действительно, пусть

$$\delta u = a_i(x, u, u' \ldots)\, \varepsilon^i(x) + b_i^{\mu}(x, u, u', \ldots)\, \varepsilon^i_{,\mu}(x),$$

где $\varepsilon^i(x)$ — произвольные функции, исчезающие на бесконечности вместе со своими производными,

$$\delta S_2 = \delta S + \lambda\, \delta S_1 = \int \left[\frac{\delta L_2}{\delta u}\, \delta u + \mathrm{div}\left(\frac{\partial L_2}{\partial u'}\, \delta u\right)\right] dV.$$

Здесь

$$\frac{\delta L_2}{\delta u} = \frac{\partial L_2}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial L_2}{\partial u_{,\nu}} = \left(\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial L}{\partial u_{,\nu}}\right) + \lambda\left(\frac{\partial L_1}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial L}{\partial u_{,\nu}}\right).$$

Поскольку интеграл действия S и соответствующий ему лагранжиан были инвариантны относительно $G_{\infty r}$, в силу второй теоремы Нётер справедливы следующие тождества (независимо от того, является ли u решением экстремали $\delta L / \delta u = 0$):

$$\frac{\delta L}{\delta u}\, a_i \equiv \partial_{\mu}\left(b_i^{\mu}\frac{\delta L}{\delta u}\right). \tag{10}$$

Это тождества для экстремалей изопериметрической задачи, где $\delta L / \delta u = -\lambda \delta L_1 / \delta u$, переходят в дополнительные условия вида

$$a_i \delta L_1 / \delta u = \partial_{\mu}(b_i^{\mu} \delta L_1 / \delta u). \tag{11}$$

По условиям изопериметрической задачи $\delta L_1 / \delta u \neq 0$, и поэтому условия (11) имеют нетривиальный смысл. Вариация S_2 сводится (при учете (10), (11) и $\delta L_2 / \delta u = 0$) к

$$\delta S_2 = \int \mathrm{div}\left[\frac{\partial L_2}{\partial u_{,\mu}} a_i \varepsilon^i + \frac{\partial L_2}{\partial u_{,\mu}} b^{\nu}\partial_{\nu}\varepsilon^i\right] dV = \oint\left(\frac{\partial L_2}{\partial u_{,\mu}} a_i \varepsilon^i + \frac{\partial L_2}{\partial u_{,\mu}} b^{\nu}\partial_{\nu}\varepsilon^i\right) d\sigma_{\mu} = 0. \tag{12}$$

Если $\varepsilon^i = \mathrm{const}$ и $G_{\infty r}$ переходит в G_r, то вместо (12) получим

$$\delta S_2 = \oint \frac{\partial L_2}{\partial u_{,\mu}} a_i \varepsilon^i d\sigma_\mu = \varepsilon^i \oint J_i^\mu \, d\sigma_\mu = 0, \tag{13}$$

так как мы предположили инвариантность S_1, а следовательно, S_2 относительно G_r. Таким образом, наши утверждения доказаны.

Соотношение (13) дает законы сохранения для изопериметрической задачи в виде

$$\oint J_i^\mu \, d\sigma_\mu = 0, \quad J_i^\mu = \frac{\partial L_2}{\partial u_{,\mu}} a_i = \underset{0}{J_i^\mu} + \lambda \frac{\partial L_1}{\partial u_{,\mu}} a_i, \tag{14}$$

$\underset{0}{J_i^\mu} = \frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}} a_i$ — ток сохранения для исходного лагранжиана.

Соотношение (14) показывает, как меняется вид токов сохранения при наложении дополнительных условий типа изопериметрической задачи. В частности, из (14) следует, что в случае калибровочных полей условия типа (1) не меняют токов сохранения.

Заметим в заключение, что дополнительные условия (11), как и инвариантность S_2 относительно $G_{\infty r}$, выполняются только на экстремалях $\delta L_2 / \delta u = 0$, т. е. являются следствием уравнений поля, в то время как инвариантность S определяется его формой и не зависит от уравнений поля.

В случае калибровочных полей тождества Нётер имеют вид

$$F_{a\,;\nu\mu}^{\mu\nu} = 0,$$

что для экстремалей (3) приводит к дополнительным условиям типа условий Лоренца ([3])

$$m^2 A_{a\,;\mu}^{\mu} = 0. \tag{15}$$

Для полупростых групп с антисимметричными по всем индексам структурными константами (15) означает просто

$$m^2 A_{a\,,\mu}^{\mu} = 0.$$

Эти дополнительные условия устраняют лишние переменные и оставляют лишь один определенный спин (например, $s = 1$ или $s = 2$) ([4]). Дополнительные условия (15) уравнивают число существенных переменных и число уравнений экстремали. Эта ситуация соответствует сужению инвариантности экстремалей S относительно бесконечной группы $G_{\infty r}$ до инвариантности уравнений (3) относительно G_r.

Поступило
6 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В сборн. Вариационные принципы механики, М., 1959. [2] А. Г. Иосифьян, Вопросы единой теории электромагнитного и гравитационно-инерциального полей, Ереван, 1959; А. Г. Иосифьян, Докл. АН АрмССР, № 1 (1970). [3] Н. П. Коноплева, В сборн. Гравитация и теория относительности, в. 4—5, Казань, 1968; Н. П. Коноплева, Геометрическое описание взаимодействий, Кандидатская диссертация, М., 1969. [4] V. I. Ogiyevetski, I. V. Polubarinov, Ann. Phys., 25, 358 (1963).