

Г. А. КУТАТЕЛАДЗЕ

О КРУЧЕНИИ ПОЛЫХ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ БРУСЬЕВ

(Представлено академиком Н. И. Muskhelishvili 5 I 1971)

Рассмотрим призматический полый брус, составленный из двух однородных изотропных стержней с различными упругими свойствами и с односвязными поперечными сечениями. Пусть составляющие стержни спаяны между собой вдоль некоторых частей боковых поверхностей так, чтобы поперечное нормальное сечение составного бруса, постоянное по его длине, представляло двусвязную область. Следовательно, область сечения бруса состоит из двух смежных односвязных областей, соответствующих стержням, и двух разомкнутых линий раздела, пересекающих границу области сечения под ненулевыми углами.

Будем считать, что боковая поверхность бруса свободна от внешних нагрузок, к основаниям приложены усилия, статически эквивалентные закручивающим парам, векторные моменты которых перпендикулярны к плоскостям оснований. Усилия, действующие на элементы поверхности раздела различных материалов, равны по величине и противоположно направлены, а компоненты смещения остаются непрерывными при переходе через эту поверхность (1).

Область какого-либо поперечного сечения бруса отнесем к плоскости переменной  $z = x + iy$  и введем в рассмотрение вспомогательную плоскость переменной  $\zeta = \xi + i\eta$ . На этой плоскости  $\zeta$  рассмотрим круговое кольцо с центром в начале координат. Пусть  $\gamma_0$  — совокупность двух отрезков действительной оси, лежащих в области кольца и делящих его пополам,  $S^+$  и  $S^-$  — верхнее и нижнее полукольца,  $\gamma_1', \gamma_2'$  и  $\gamma_1'', \gamma_2''$  — верхние и нижние половины внешней и внутренней окружностей  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  соответственно ( $\gamma_1 = \gamma_1' + \gamma_1''$ ,  $\gamma_2 = \gamma_2' + \gamma_2''$ ), а  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — радиусы окружностей ( $\rho_1 > \rho_2$ ).

Предположим далее, что функция  $\omega(\zeta)$  осуществляет конформное отображение области поперечного сечения бруса на кольцо  $S$  ( $S = S^+ + S^- + \gamma_0$ ). Потребуем, чтобы при данном отображении линиям раздела составляющих сред области сечения соответствовали отрезки диаметра кольца.

Тогда рассматриваемая задача кручения приводится к отысканию функций  $F_1(\zeta)$  и  $F_2(\zeta)$ , голоморфных соответственно в областях  $S^+$  и  $S^-$ , по граничным условиям (1)

$$F_1(\sigma) + \overline{F_1(\sigma)} = \omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)} + (j-1)c \quad \text{на } \gamma_j', \quad (j=1, 2) \quad (1)$$

$$F_2(\sigma) + \overline{F_2(\sigma)} = \omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)} + (j-1)c' \quad \text{на } \gamma_j''; \quad (2)$$

$$F_1(\sigma) - \overline{F_1(\sigma)} = F_2(\sigma) - \overline{F_2(\sigma)} \quad \text{на } \gamma_0; \quad (3)$$

$$\mu_1[F_1(\sigma) + \overline{F_1(\sigma)}] = \mu_2[F_2(\sigma) + \overline{F_2(\sigma)}] + (\mu_1 - \mu_2)\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)} \quad \text{на } \gamma_0. \quad (4)$$

где  $\sigma$  — аффикс точек  $\gamma_0, \gamma_1', \gamma_1'', \mu_1$  и  $\mu_2$  — модули сдвига составляющих материалов,  $c$  — постоянная, подлежащая определению,  $\mu_2 c' = \mu_1 c$ , а  $F_j(\sigma)$  — граничные значения функции  $F_j(\zeta)$ , связанной с комплексной функцией кручения  $f_j(\zeta)$  соотношением

$$f_j(\zeta) = iF_j(\zeta) \quad (j=1, 2). \quad (5)$$

Определим функцию  $F_1(\zeta)$  в области  $S^-$  таким образом:

$$(\mu_1 + \mu_2)F_1(\zeta) = 2\mu_2 F_2(\zeta) - (\mu_1 - \mu_2)[\overline{F_1(\zeta)} - \omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}], \quad \zeta \in S^-, \quad (6)$$

где  $\overline{F_1(\zeta)} = \overline{F_1(\overline{\zeta})}$ ,  $\overline{\omega(\zeta)} = \overline{\omega(\overline{\zeta})}$ . Тогда, согласно граничным условиям (3) и (4), функция  $F_1(\zeta)$ , распространенная на  $S^-$  равенством (6), аналитически продолжает значения  $F_1(\zeta)$  из верхнего полукольца  $S^+$  в нижнее полукольцо  $S^-$  через отрезки  $\gamma_0$ . Следовательно,  $F_1(\zeta)$  будет голоморфной функцией во всем кольце  $S$ . В дальнейшем доопределенную таким образом функцию обозначим через  $F(\zeta)$ .

Граничные условия (1) и (2) примут теперь вид

$$F(\sigma) + \overline{F(\sigma)} = \omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)} + (j-1)c \quad \text{на } \gamma_j', \quad (7)$$

$$(\mu_1 + \mu_2)[F(\sigma) + \overline{F(\sigma)}] + (\mu_1 - \mu_2)[\overline{F(\sigma)} + F(\overline{\sigma})] = 2\mu_2(j-1)c' + 2\mu_2\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)} + (\mu_1 - \mu_2)[\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)} + \omega(\overline{\sigma})\overline{\omega(\overline{\sigma})}] \quad \text{на } \gamma_j'' \quad (j=1, 2). \quad (8)$$

Внесем в граничное условие (7)  $\overline{\sigma}$  вместо  $\sigma$ , считая, что  $\sigma \in \gamma_j''$  (а, следовательно,  $\overline{\sigma} \in \gamma_j'$ ), полученное равенство умножим на  $(\mu_1 - \mu_2)$  и вычтем его из равенства (8).

Тогда

$$F(\sigma) + \overline{F(\sigma)} = \Omega(\sigma) + (j+1)c \quad \text{на } \gamma_j'', \quad (9)$$

где

$$\Omega(\sigma) = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} [\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)} + \omega(\overline{\sigma})\overline{\omega(\sigma)} - \omega(\overline{\sigma})\overline{\omega(\sigma)}].$$

Таким образом, рассматриваемая задача приведена к отысканию функции  $F(\zeta)$  из условий (7) и (9). После определения  $F(\zeta)$  функция  $\overline{F_1(\zeta)}$  находится непосредственно, а  $F_2(\zeta)$  определяется из формулы (6).

Задача отыскания функции  $F(\zeta)$  есть видоизмененная задача Дирихле для кругового кольца <sup>(2)</sup>. Решая эту задачу, находим

$$F(\zeta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \zeta^k + b_k \zeta^{-k}), \quad (10)$$

где

$$2a_0 = A_0^{(1)}, \quad c = A_0^{(1)} - A_0^{(2)},$$

$$a_k = (A_k^{(1)} \rho_1^k - A_k^{(2)} \rho_2^k) / (\rho_1^{2k} - \rho_2^{2k}), \quad b_k = (A_{-k}^{(2)} \rho_1^k - A_{-k}^{(1)} \rho_2^k) / [\rho_1^{-k} \rho_2^{-k} (\rho_1^{2k} - \rho_2^{2k})],$$

а  $A_{\pm k}^{(j)}$  ( $j=1, 2$ ) — коэффициенты рядов Фурье, заданных на контуре кольца функций,

$$A_{\pm k}^{(j)} = \frac{\rho_j^{\pm k}}{2\pi i} \left[ \int_{\gamma_j} \omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)} \sigma^{\mp(k\pm 1)} d\sigma + \int_{\gamma_j} \Omega(\sigma) \sigma^{\mp(k\pm 1)} d\sigma \right].$$

Заметим, что при  $\rho_2 = 0$  мы будем иметь решение, соответствующее случаю, когда составной брус имеет односвязное поперечное сечение <sup>(3)</sup>. Случай, когда одно из  $\mu_j$  равно нулю, рассматривался в работе <sup>(4)</sup>.

В качестве примера рассмотрим случай, когда отображающая функция имеет вид

$$\omega(\zeta) = R_0(\zeta + \lambda/\zeta), \quad R_0 > 0, \quad (11)$$

где  $\lambda$  — действительное число. Тогда поперечное сечение бруса на плоскости  $z$  будет представлять собой конфокальное эллиптическое кольцо с центром в начале координат. При  $\lambda = \rho_2 = 1$  мы будем иметь сплошной

составной эллипс, разрезанный по прямолинейному отрезку, соединяющему его фокусы, причем большая ось его будет совмещена с осью  $Ox$ . Области сечений стержней будут представлять собой верхнюю и нижнюю половины эллипса, а линиями раздела сред будут служить отрезки большой оси, соединяющие фокусы с вершинами; при  $\lambda = -1$ ,  $\rho_2 = 1$  получается сечение в виде эллипса, разрезанного также по прямолинейному отрезку, соединяющему его фокусы, а линиями раздела сред являются малые полуоси эллипса, лежащие на этот раз на оси  $Ox$ .

Для функции кручения в случае отображения (11) имеем формулу

$$f_j(\xi) = \frac{2i\mu_k}{\mu_1 + \mu_2} \frac{\lambda R_0^2}{1 + R^2} \left( \frac{\xi^2}{\rho_1^2} + \frac{\rho_2^2}{\xi^2} \right) + \frac{R_0^2}{2} \frac{\mu_j - \mu_k}{\mu_1 + \mu_2} \left( \xi^2 + \frac{\lambda^2}{\xi^2} \right) -$$

$$- \frac{8R_0^2}{\pi\rho_1^2} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(\rho_1^2 - \lambda)^2 - (\rho_2^2 - \lambda)^2 R^{2n-3}}{(2n-3)(4n^2-1)(1-R^{4n-2})} \left( \frac{\xi}{\rho_1} \right)^{2n-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\rho_1^2 - \lambda)^2 R^{2n+1} - (\rho_2^2 - \lambda)^2}{R^2(2n-3)(4n^2-1)(1-R^{4n-2})} \left( \frac{\rho_2}{\xi} \right)^{2n-1} \right],$$

$$j = 1, 2; k = 1, 2; j \neq k, R = \rho_2 / \rho_1.$$

Выпишем значения компонентов напряжения для двух конкретных случаев ( $\lambda = \rho_2 = 1$  и  $\lambda = -1$ ,  $\rho_2 = 1$ ) вблизи концов разреза в точках большой оси эллипса. В первом случае, обозначая через  $s$  расстояние рассматриваемой точки до какого-либо конца разреза, при малом  $s$  получаем

$$X_z = O(1), \quad Y_z = \frac{K}{V s} + O(1), \quad K = \frac{4\tau\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} R_0^{3/2} \frac{(c_1' + c_1'')^2 - 4R_0^2}{(c_1' + c_1'')^2 + 4R_0^2},$$

где  $X_z$  и  $Y_z$  — компоненты напряжения,  $c_1'$  и  $c_1''$  — полуоси эллипса ( $c_1' > c_1''$ ).

Аналогично для второго случая при  $s_j \rightarrow 0$  имеем

$$X_z = \frac{K_j}{V s_j} + O(1), \quad Y_z = O(1) \quad (j = 1, 2),$$

$$K_j = -K - \tau\mu_j 8R_0^{3/2} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho_1^2 + 1)^2 \rho_1^{2n-1} - 2(\rho_1^{4n+2} + 1)}{(2n-1)(2n+3)(\rho_1^{4n+2} - 1)}, \quad \rho_1 = \frac{c_1' + c_1}{2R_0}.$$

Значения коэффициентов интенсивности напряжения  $K$ ,  $K_j$  для случая однородных брусков ( $\mu_1 = \mu_2$ ) другим путем были найдены в работе (1). В качестве другого примера рассмотрим случай, когда поперечное сечение составного бруса представляет собой эксцентрическое круговое кольцо (рис. 1). Пусть секторальным областям  $S_1$  и  $S_2$ , ограниченными дугами окружностей  $L_0$ ,  $L_1$  и  $L_2$ , соответствуют модули сдвига  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Легко видеть ((1), § 48), что функция  $\omega(\xi) = i\xi / (1 - ai\xi)$ , где  $a$  — положительная величина, отображает область сечения бруса на кольцо  $S$  плоскости  $\xi$ , причем областям  $S_1$  и  $S_2$  будут соответствовать полукольца  $S^+$  и  $S^-$ , а дугам окружностей  $L_0$ ,  $L_1$  и  $L_2$  — отрезки  $\gamma_0$  диаметра кольца  $S$  и полуокружности  $\gamma_j'$  и  $\gamma_j''$  ( $j = 1, 2$ ). Предполагается, что окружность  $L_0$  имеет своим центром точку  $z = -1/2a$ , а радиус ее равен  $1/2a$ .

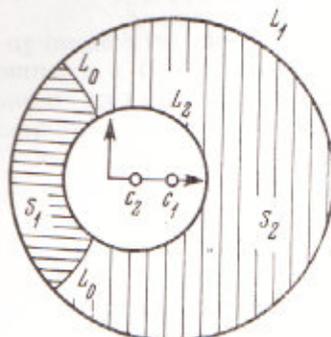


Рис. 1

Для функции  $F(\zeta)$  здесь будем иметь

$$F(\zeta) = \frac{ic_1\zeta}{1-ia\zeta} + \frac{l}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \rho_1^n}{1-R^{2n}} \left[ \left( \frac{i\zeta}{\rho_1} \right)^n R^n - \left( \frac{\rho_2}{\zeta} \right)^n \right] +$$

$$+ \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left[ \frac{\zeta^2}{2} \frac{1+2ac_1}{1+a^2\zeta^2} - \frac{l}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n} \rho_2^{2n}}{1-R^{4n}} \left( \frac{\zeta^{2n}}{\rho_1^{2n}} R^{2n} - \frac{\rho_2^{2n}}{\zeta^{2n}} \right) \right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{n1} - Q_{n2} R^{2n-1}}{1-R^{4n-2}} \frac{\zeta^{2n-1}}{\rho_1^{2n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{n1} R^{2n-1} - Q_{n2}}{1-R^{4n-2}} \frac{\rho_2^{2n-1}}{\zeta^{2n-1}},$$

где  $l = c_1 - c_2$ ,  $c_j = a\rho_j^2/(1-a^2\rho_j^2)$ ,  $R = \rho_2/\rho_1$ ,

$$Q_{nj} = \frac{2}{a\pi i} \frac{c_j}{2n-1} - \frac{2}{a^2} \frac{2n-1}{\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(1+2ac_j) a^{2k} \rho_j^{2k}}{4k^2 - (2n-1)^2} \quad (j=1, 2).$$

Легко заметить, что эти ряды вместе со своими первыми производными сходятся абсолютно и равномерно в кольце  $S$ , включая и контуры  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

Выражения для функции кручения можно теперь получить из формул (5) и (6).

Тбилисский математический институт  
им. А. М. Размадзе  
Академии наук ГрузССР

Поступило  
30 XII 1970

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Н. И. Muskhelishvili, Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., 1966. <sup>2</sup> Н. И. Muskhelishvili, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968. <sup>3</sup> Г. А. Кутателадзе, Прикладная механика (АН УССР), 4, 12 (1968). <sup>4</sup> Г. А. Кутателадзе, Сообщ. АН ГрузССР, 47, № 3 (1967). <sup>5</sup> Г. Си, Прикладная механика (Тр. Америк. общ. инженеров-механиков), 30, сер. Е, № 3 (1963).