Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 4

МАТЕМАТИКА

А. А. КАРАЦУБА

ОБ ОДНОЙ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ СУММЕ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 19 II 1971)

Нахождение нетривиальной оценки для суммы

$$T = \sum_{n\leqslant N} \tau_k(n)\chi(n+l), \quad \chi \neq \chi_0 \bmod q, \quad l \equiv 0 \pmod q)$$

при $N=N(q)$ и любых k в настоящее время проблематично, однако аналогичная задача для той же суммы, но с $l \not\equiv 0 \pmod q$ может быть решена. Одним из следствий таких оценок являются асимптотические формулы для некоторых арифметических сумм, связанных с функцией $\tau_k(n)$ (см. теорему 2). Мы здесь рассматриваем случай «коротких» сумм T, т. е. таких, у которых длина интервала суммирования N не превосходит q^{10}; случай «длинных» сумм T проще и может быть полностью исследован этим же методом.

Обозначения: $q \geqslant q_0$ — простое число, χ — неглавный характер $\bmod q$; a — произвольное, но фиксированное целое положительное число; l — произвольное целое число, не кратное q; $\varepsilon > 0$ — сколь угодно мало; $k \geqslant 1$ — целое число.

Теорема 1. *Пусть ω — произвольное положительное число, не превосходящее* 0,25, $q^{0,5+\omega} \leqslant N \leqslant q^{10}$ *и*

$$T = \sum_{n\leqslant N} \tau_k(n)\chi(n+l).$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$T \gg Ng^{-0,01\omega} \exp\{8\ k \ln N / (\ln\ln N)\},$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит только от ω.

Теорема 2. *Пусть N удовлетворяет условиям теоремы 1. Рассмотрим суммы T_B и T_H:*

$$T_B = \sum_{n\leqslant N}{}' \tau_k(n+a), \quad T_H = \sum_{n\leqslant N}{}'' \tau_k(n+a),$$

где штрих в сумме T_B (соответственно два штриха в сумме T_H) означает суммирование по числам n, которые являются квадратичными вычетами (соответственно невычетами) mod q.

Справедливы следующие асимптотические формулы:

$$T_B = {}^1/_2 T_k(N) + O(Nq^{-0,01\omega^2} \exp\{8\ k \ln N / (\ln\ln N)\}),$$

$$T_H = {}^1/_2 T_k(N) + O(Nq^{-0,01\omega^2} \exp\{8\ k \ln N / (\ln\ln N)\}),$$

где

$$T_k(N) = \sum_{n\leqslant N} \tau_k(n) = NP_k(\ln N) + O(N^{(k-1)/(k+1)+\varepsilon})$$

и $P_k(x)$ — многочлен x степени $k-1$.

Теорема 2 тривиально следует из теоремы 1. Сформулируем три леммы, необходимые для доказательства теоремы 1.

Лемма A. *Рассмотрим сумму*

$$W_A = \sum_{U < u \leqslant U_1} \sum_{\substack{V < v \leqslant V_1 \\ vu \leqslant N}} \psi_1(u)\,\psi_2(v)\,\chi(vu + l),$$

где $U < U_1 \leqslant 2U$, $V < V_1 \leqslant 2V$, $\psi_1(u)$ *и* $\psi_2(v)$ — *произвольные комплекснозначные функции* u *и* v, *и при указанных значениях* u *и* v *величины* $|\psi_1(u)|$ *и* $|\psi_2(v)|$ *не превосходят соответственно* H_1 *и* H_2.

Тогда, если $U \geqslant q^{0,5+\gamma_1}$, $V \geqslant q^{\gamma}$ *при некоторых положительных* γ_1 *и* γ, *не превосходящих* 0,5, *то для величины* W_A *справедлива оценка*

$$W_A \ll H_1 H_2 UV\Delta_A, \quad \Delta_A = q^{-0,25\gamma\gamma_1},$$

и постоянная в знаке $\ll$ *зависит только от* γ.

Лемма B. *Рассмотрим сумму*

$$W_B = \sum_{V < v \leqslant 2V} \sum_{\substack{U < u \leqslant U_1 \\ uv \leqslant N}} \psi(v)\,\chi(vu + l),$$

где $U < U_1 \leqslant 2U$ *и* $|\psi(v)|$ *при рассматриваемых значениях* v *не превосходит* H. *Предположим далее, что величины* U *и* V *удовлетворяют условиям*

$$U \geqslant q^{\gamma}, \quad VU \geqslant q^{0,5+\gamma_1}, \quad U \leqslant q^{-0,5-\gamma_2}, \quad VU^{-1} \geqslant q^{\gamma_3},$$

с некоторыми положительными постоянными γ, γ_1, γ_2, γ_3, *причем* $\gamma < 0{,}333$.

Тогда для величины W_B *справедлива оценка*

$$W_B \ll q^{\varepsilon} HUV\Delta_B, \quad \Delta_B = q^{-0,125\gamma} + q^{-0,5\gamma\gamma_1} + q^{-0,5\gamma\gamma_2} + q^{-0,25\gamma\gamma_3},$$

и постоянная в знаке $\ll$ *зависит только от* γ *и* ε.

Лемма C. *Пусть* $0 < \gamma < 0{,}5$, $U \geqslant q^{0,25+\gamma}$, $0 \leqslant b \leqslant q - 1$,

$$S = \sum_{1 \leqslant u \leqslant U} \chi(u + b).$$

Тогда для суммы S *справедлива оценка*

$$S \ll q^{\varepsilon} U\Delta, \quad \Delta = q^{-0,5\gamma^2},$$

и постоянная в знаке $\ll$ *зависит только от* γ.

Доказательство теоремы 1. Имеем

$$T = \sum_{x_1 \ldots x_k \leqslant N} \chi(x_1 \ldots x_k + l).$$

Каждое из переменных суммирования $x_1, \ldots, x_k$ пробегает значения целых чисел интервала $[1, N]$; эти значения связаны соотношением $x_1 \ldots x_k \leqslant N$. Разобьем каждый из таких интервалов на $\ll \ln N$ интервалов вида $(X, 2X]$. Соответственно этому разбиению сумма T разобьется на $\leqslant (2\ln N)^k$ сумм T_1 вида

$$T_1 = T_1(X_1, \ldots, X_k) = \sum_{X_1 < x_1 \leqslant 2X_1} \cdots \sum_{\substack{X_k < x_k \leqslant 2X_k \\ x_1 \ldots x_k \leqslant N}} \chi(x_1 \ldots x_k + l).$$

Рассмотрим одну из таких сумм. Достаточно рассмотреть случай $X_1 \ldots X_k \geqslant Nq^{-0,25\omega}$. Не нарушая общности, предположим, что $1 \leqslant X_1 \leqslant \ldots \leqslant X_k$.

Если $X_k \geqslant q^{0,25+0,25\omega}$, то по лемме C имеем

$$T_1 \ll q^{\varepsilon} N q^{-0,031\omega^2} \max_{n \leqslant N} \tau_k(n). \tag{1}$$

Если $q^{0,25\omega} \leqslant X_k < q^{0,25+0,25\omega}$, то вводя обозначения $x_k = u$, $x_1 \ldots x_{k-1} = v$, $\psi(v)$ — число решений в числах $x_1, \ldots, x_{k-1}$ уравнения $x_1 \ldots x_{k-1} = v$, $U = X_k$, $V = X_1 \ldots X_{k-1}$, получим

$$T_1 = \sum_{\substack{V < v \leqslant 2^k V \\ uv \leqslant N}} \sum_{U < u \leqslant 2U} \psi(v) \chi(uv + l).$$

Легко проверить следующие соотношения:

$$q^{0,25\omega} \leqslant U < q^{0,25+0,25\omega} \leqslant q^{0,5-0,125}, \quad UV > Nq^{-0,25\omega} \geqslant q^{0,05+0,75\omega},$$

$$VU^{-1} \geqslant q^{0,5+0,75\omega} U^{-2} \geqslant q^{0,25\omega}.$$

Следовательно, к T_1 можно применить лемму B; после простых вычислений, получаем

$$T_1 \leqslant q^{\varepsilon} 2^k N q^{-0,015\omega^2} \max_{v \leqslant N} \tau_{k-1}(v). \tag{2}$$

Наконец, если $X_k < q^{0,25\omega}$, то, так как $X_1 \ldots X_k \geqslant Nq^{-0,25\omega}$, найдутся номера $j_1, \ldots, j_{s-1}, j_s$ такие, что

$$X_{j_1} \ldots X_{j_{s-1}} < q^{0,5+0,25\omega} < X_{j_1} \ldots X_{j_{s-1}} X_{j_s} < q^{0,5+0,5\omega}.$$

Обозначая через $\psi_1(u)$ и $\psi_2(v)$ соответственно числа решений уравнений $x_{j_1} \ldots x_{j_s} = u$, $x_1 \ldots x_k u^{-1} = v$, в числах $x_1, \ldots, x_k$, видим, что $\psi_1(u) \leqslant \leqslant \tau_s(u)$, $\psi_2(v) \leqslant \tau_{k-s}(v)$; кроме того, $q^{0,5+0,25\omega} < u < q^{0,5+0,5\omega}$, $v \geqslant q^{0,25\omega}$. Разбивая интервалы суммирования по u и v на интервалы вида $(U, 2U]$, $(V, 2V]$ получим $\ll (\ln N)^2$ сумм, к каждой из которых можно применить лемму A; получим

$$T_1 \leqslant 2^k N q^{-0,015\omega^2} (\max_{v \leqslant N} \tau_k(v))^2. \tag{3}$$

Из оценок (1), (2), (3) следует утверждение теоремы.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
5 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Карацуба, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, 2, 299 (1970).