

В. В. ПАВЛОВ, Г. М. УЛАНОВ

ИНВАРИАНТНОСТЬ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 4 II 1971)

Метод нелинейной теории инвариантности ⁽¹⁻³⁾ позволяет решать сложные задачи теории управления, в том числе и задачи построения игровых стратегий в дифференциальных играх, заданных уравнениями

$$dx/dt = f(x, u, v), \quad u \in Q_u, \quad v \in Q_v, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка n -мерного фазового пространства E^n , $u = (u_1, \dots, u_k)$ и $v = (v_1, \dots, v_r)$ — управления, находящиеся в распоряжении двух игроков; Q_u, Q_v — замкнутые ограниченные множества в пространствах E^k и E^r . Функции $f_i(x, u, v)$, $\partial f_i / \partial x_j$; $\partial^2 f_i / \partial x_j \partial x_k$; $\partial f_i / \partial u_j$; $\partial f_i / \partial v_j$ — непрерывные функции, определенные на прямом произведении $Q_x \cap Q_u \cap Q_v$.

Пусть $Q_x = Q_x^{yc} \cup Q_x^{+nyc}$. Здесь Q_x^{yc} — область управляемого состояния системы (1), а Q_x^{+nyc} — область положительно полууправляемого состояния. При этом область Q_x^{yc} характеризуется тем, что любые ее две точки взаимно соединяемы с помощью управления $u \in Q_u$ при произвольном $v \in Q_v$. Характерным свойством области Q_x^{+nyc} является то, что каждая ее точка x соединяема с областью Q_x^{yc} с помощью $u \in Q_u$ при любом $v \in Q_v$. Противоположное действие при этом невозможно.

Цель игры задается m -мерным терминальным многообразием S в E^n в виде вектор-функции

$$\varphi(x) = 0, \quad (2)$$

где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ вместе со всеми производными $\partial \varphi_i / \partial x_j$ — непрерывные действительные вектор-функции, определенные в области Q_x^* пространства E^n ; $mS \neq 0$.

Далее, зададим множество $S\Delta x$ уровня Δx с помощью соотношения

$$\Delta x = \varphi(x), \quad (3)$$

определенного в области $Q_{\Delta x}^*$ пространства E_n ; Δx — m -мерный вектор.

Будем считать, что имеет место соотношение

$$Q_{\Delta x}^* \supseteq Q_x. \quad (4)$$

Здесь множество $S\Delta x$ характеризует уровень дифференциальной игры.

Соотношение (3) позволяет получить систему дифференциальных уравнений, характеризующих изменение уровня дифференциальной игры Δx в зависимости от управлений u и v противников

$$d\Delta x / dt = \psi(x, u, v), \quad (5)$$

$\psi(x, u, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(x, u, v)$ — m -мерная вектор-функция.

Пусть функция платы игры имеет вид

$$I(\Delta x_0, u) = \int_{t_0}^T G(\Delta x, u) dt; \quad (6)$$

здесь $G(\Delta x, u)$ — функция, определенная на $E^n \cap E^r$.

Будем искать выигрышную стратегию игрока u в классе инвариантных стратегий при одновременной минимизации функции (6), что означает

решение задачи по нахождению стратегии $u(x, v)$, обеспечивающей достижение

$$\operatorname{inv} \min_{v, u} I. \quad (7)$$

Инвариантная к v стратегия $u(x, v)$, согласно ^(1, 2), находится в результате решения функционального уравнения абсолютной полиинвариантности

$$\psi(x, u, v) = P, \quad (8)$$

где P — m -мерный вектор инвариантного управления состоянием (уровнем) дифференциальной игры.

Уравнение (8) позволяет найти помимо явного вида стратегии $u(x, v, p)$ также область ограничения $Q_P(x, v)$, $(x, v) \in Q_P \cap Q_v$, для инвариантного управления P .

В результате процесс решения дифференциальной игровой задачи (1) сводится на данном этапе к решению «компенсированной динамической задачи»

$$d\Delta x/dt = P, \quad P \in Q_P(x, v), \quad (x, v) \in Q_P \cap Q_v, \quad (9)$$

обеспечивающей выполнение соотношения (7) или ему эквивалентного требования достижения

$$\operatorname{inv} \min_{v, u} I(\Delta x, u) = \operatorname{inv} \min_{v, P} I(\Delta x, u(P)), \quad (10)$$

поскольку минимизация платы игры в классе инвариантных стратегий означает минимизацию ее по инвариантному управлению P как единственной составляющей полного управления u , находящейся в нашем распоряжении. При этом компенсированная динамическая задача подразделяется на следующие классы задач в зависимости от того, какая часть области $Q_P(x, v)$ (обозначаемая через Q_P') принимается за основу при решении задачи (9) — (10):

- а) полный класс — при $Q_P' = Q_P(x, v)$;
- б) частично инвариантный по области Q_P — при

$$Q_P' = \operatorname{inv}_v Q_P = Q_P''(x), \quad v \in Q_v; \quad (11)$$

- в) инвариантно-минимаксный по области

$$Q_P' = \operatorname{inv}_{x, v} Q_P(x, v) = Q_P''' x \in Q_x^{yc}, \quad v \in Q_v; \quad (12)$$

Наиболее совершенная (но и наиболее сложная) — полная компенсированная динамическая задача. Она не «прощает ошибок» противнику.

Решение задачи (9), (10) дает так называемую частную стратегию $P(\Delta x)$ решения игровой задачи, которая совместно с инвариантной частью стратегии $u(x, v, P)$ и определяет полную стратегию дифференциально-игровой задачи.

Необходимым условием решения дифференциально-игровых задач (1), (2), (6) является требование существования решения соответствующей игровой задачи качества (1), (2). Для последней справедлива

Т е о р е м а. *Решение дифференциальной игры качества (1), (2) существует для всех начальных условий $x(0) \in Q_x$, если существует пересечение терминального многообразия S с областью управляемого состояния Q_x^{yc} .*

Поступило
12 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. Н. Петров, А. И. Кухтенко, Тр. III Всесоюз. совещ. по теории инвариантности, «Наука», 1969. ² Г. М. Уланов, Статистические и информационные вопросы управления по возмущению, М., 1969. ³ В. В. Павлов, Инвариантность и автономность нелинейных систем управления, Киев, 1971; Тр. III Всесоюз. совещ. по инвариантности, «Наука», 1968.