Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 1

УДК 517.548.32 МАТЕМАТИКА

Н. К. КАРАПЕТЯНЦ, С. Г. САМКО

О ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРАХ ВИНЕРА — ХОПФА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 2 III 1971)

Пусть h_{nk} — ограниченная двойная последовательность, имеющая: 1) один из повторных (равномерных) пределов при $(n, k)\to(+\infty, +\infty)$, который мы обозначим $h_{+\infty, +\infty}$, и 2) аналогично один из повторных пределов $h_{-\infty, -\infty}$ при $(n, k)\to(-\infty, -\infty)$. Тогда для оператора $H\varphi = \{(H\varphi)_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ «типа свертки»

$$(H\varphi)_n = \varphi_n - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{nk}a_{n-k}\varphi_k, \quad n = 0, \pm 1, \ldots, \tag{1}$$

справедлива

Теорема 1. *Пусть $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in l_1$. Для того чтобы оператор H был оператором Нётера в пространствах последовательностей l_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, c, c_0, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sigma(t)^+ \stackrel{\text{def}}{=} 1 + h_{+\infty, +\infty}\, a(t) \neq 0, \quad \sigma(t)^- \stackrel{\text{def}}{=} 1 + h_{-\infty, -\infty}\, a(t) \neq 0, \tag{2}$$

где $a(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k t^k$. *При этом* $\varkappa(H) = \operatorname{ind} \sigma(t)^- / \sigma(t)^+$.

Эта теорема, аналогично [1], где рассмотрены интегральные операторы (1), получается применением следующей леммы.

Лемма 1. *Если $h_{+\infty, +\infty} = h_{-\infty, -\infty} = 0$, то оператор*

$$T\varphi = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{nk}a_{n-k}\varphi_k \right\}_{n=-\infty}^{\infty} \in J\ * \tag{3}$$

вполне непрерывен в пространствах l_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, c, c_0.

Нас будет интересовать возможность нётеровости оператора H в случае, когда h_{nk} осциллирует на бесконечности. Здесь возникает много различных типов операторов в зависимости от характера осцилляции. В статье предлагается исследование двух «модельных» операторов, когда $h_{nk} = \gamma_n \tilde{h}_{nk}$, где $\tilde{h}_{nk}$ удовлетворяет условиям теоремы 1, а для γ_n допускается одна из следующих двух возможностей:

1) либо $\gamma_n = \begin{cases} e^{i\alpha n}, \\ e^{i\beta n}, \end{cases} n \geqslant 0$, при рациональных $\alpha / (2\pi)$, $\beta / (2\pi)$ **,

2) либо γ_n составлена из двух сходящихся подпоследовательностей, одна из которых имеет пределом нуль:

$$\gamma_n = \begin{cases} \mu_n, & n = 2k, \\ \delta_n, & n = 2k + 1, \end{cases} \quad k = 0, \pm 1, \ldots, \tag{4}$$

и $\lim\limits_{n\to\pm\infty} \mu_n = \mu_\pm$, $\lim\limits_{n\to\pm\infty} \delta_n = 0$.

Вначале рассмотрим, для простоты, оператор типа Винера — Хопфа $\tilde{h}_{nk} = 0$ при $k < 0$, любом n, и при $n < 0$ и любом k.

---

* Здесь и всюду в дальнейшем J означает кольцо вполне непрерывных операторов в рассматриваемом пространстве.

** Для $h_{nk} = 1$ случай иррационального $\alpha / (2\pi)$ $(\alpha = \beta)$ рассмотрен в [2].

311563.
Гомельский госу. университет БИБЛИОТЕКА

В силу леммы 1 вместо оператора H мы можем рассматривать оператор

$$(A\varphi)_n = \varphi_n - \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k}\varphi_k, \quad n=0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеют вид 1) или 2).

1°. Пусть $\gamma_n = e^{i\alpha n}$, $\alpha/(2\pi) = r/m$, $(r, m) = 1$. Наряду с оператором

$$(A\varphi)_n = \varphi_n - e^{i\alpha n} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k}\varphi_k, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

будем рассматривать операторы A_j,

$$(A_j\varphi)_n = \varphi_n - \varepsilon_j e^{i\alpha n} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k}\varphi_k, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{7}$$

где $\varepsilon_j = e^{\frac{2\pi i}{m} j}$. Очевидно, $A_j = A_{j+km}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

Теорема 2. *Операторы A и A_j одновременно нётеровы в l_{p+} $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, c_{0+} и имеют одинаковый индекс $\varkappa(A) = \varkappa(A_j)$, каково бы ни было $j = 1, 2, \ldots, m-1$.*

Доказательство теоремы основывается на соотношении

$$\tau_N A = A_{Nr}\tau_N - T_N, \quad N = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{8}$$

где τ_N — операция «сдвига» влево $\tau_N\varphi = \{\varphi_N, \varphi_{N+1}, \ldots\}$, а операторы T_N,

$$\{(T_N\varphi)_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\varepsilon_{rN} e^{i\alpha(n+N)} \sum_{k=0}^{N} a_{n+N-k}\varphi_k\right\}_{n=0}^{\infty}$$

вполне непрерывны в силу леммы 1, и на соотношениях

$$\tau_N\tau_N^{-1}\varphi = \varphi, \quad \tau_N^{-1}\tau_N\varphi = (I + T)\varphi,$$

где $\tau_N^{-1}\varphi = \{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{N}, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$, I — тождественный оператор, а T — вполне непрерывный оператор. Отметим, что в (8) участвуют все операторы A_j, $j = 1, 2, \ldots, m-1$.

Операторы A_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, коммутируют:

$$A_j A_k = A_k A_j. \tag{9}$$

Оказывается, композиция $AA_1A_2 \ldots A_{m-1}$ является (с точностью до вполне непрерывного слагаемого) некоторым оператором Винера — Хопфа уже без осциллирующего коэффициента:

$$AA_1A_2 \ldots A_{m-1} = W + T, \quad T \in J, \tag{10}$$

$$W\varphi = \{(W\varphi)_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\varphi_n - \sum_{k=0}^{\infty} w_{n-k}\varphi_k\right\}_{n=0}^{\infty},$$

$$w(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k t^k = a(t)\, a(te^{i\alpha}) \ldots a\,[te^{i\alpha(m-1)}].$$

Из соотношений (9), (10) и из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Для того чтобы оператор A, определяемый равенством (6), был нётеров в l_{p+} $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, c_{0+}, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sigma_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - a(t)\, a(te^{i\alpha}) \ldots a\,[te^{i\alpha(m-1)}] \neq 0. \tag{11}$$

При выполнении (11)

$$\varkappa(A) = \frac{1}{m}\varkappa(W) = -\frac{1}{m}\operatorname{ind}\sigma_1(t).$$

Отметим, что $T = 0$ в равенстве (10), если $a = a_+$ или $a = a_-$, т. е.

$$a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \text{ или } a(t) = \sum_{k=-\infty}^{0} a_k t^k.$$

Замечая, что операторы A_j не имеют общих нулей (равно как и A_j^*), из (10) заключаем, что оператор A имеет d-характеристику $(0, -\varkappa)$, если $a = a_+$ и $(\varkappa, 0)$, если $a = a_-$.

Наконец, из (8) вытекает следующая связь между нулями операторов A и A_j в случае $a = a_-$: если φ — нуль оператора A, то $\tau_N\varphi$ — нуль оператора A_j с номером $j = Nr$.

2°. Пусть теперь $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеет вид (4). В силу леммы оператор (5) отбрасыванием вполне непрерывного слагаемого всегда можно привести к такому виду, чтобы $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty} = \mu_+\{1, 0, 1, 0, \ldots\}$. Введем проекторы

$$P\varphi = \{\varphi_0, 0, \varphi_2, 0, \ldots\}, \quad Q\varphi = \{0, \varphi_1, 0, \varphi_3, \ldots\},$$

так что

$$A = Q + P(I - \mu_+\tilde{A}) + T, \quad T \in J,$$

где $\tilde{A}\varphi = \{(\tilde{A}\varphi)_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{n-k}\varphi_k\right\}_{n=0}^{\infty}$.

Оператор A в пространствах l_{p+} $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, c_{0+} и оператор $I - \mu_+\tilde{A}$ в пространствах $P(l_{p+})$, $P(c_{0+})$ одновременно нётеровы и имеют одинаковый индекс (см. [3], лемма 3).

Теорема 4. *Для того чтобы оператор* (5) *при* $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$, *имеющем вид* (4), *был нётеровым в пространствах* l_{p+} $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, c_{0+}, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sigma_2(t) \overset{\text{def}}{=} 1 - \mu_+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{2k}t^{2k} \neq 0, \quad |t| = 1.$$

При выполнении этого условия $\varkappa(A) = -\operatorname{ind}\sigma_2(t)$.

Если $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ *с самого начала имеет вид* $\mu_+\{1, 0, 1, 0, \ldots\}$, *то d-характеристика оператора* (5) *имеет вид* $(\varkappa, 0)$ *при* $\varkappa \geqslant 0$ *и* $(0, |\varkappa|)$ *при* $\varkappa \leqslant 0$.

Замечание. Результаты п. 2°, изложенные для $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ вида (4), как нетрудно заметить, легко переносятся на более общий случай, когда $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ разбивается на две подпоследовательности, так что $\lim_{k\to+\infty} \gamma_{kl+\nu} = \mu_+$, где l и ν — фиксированные целые числа, а оставшаяся подпоследовательность $\{\gamma_n\}_{n\neq kl+\nu}$ сходится к нулю. Символ в этом случае будет иметь вид $1 - \mu_+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{lk}t^{lk}$ и теорема 4 остается в силе.

3°. Перейдем к рассмотрению парного оператора

$$\Pi_1\varphi = \begin{cases} \varphi_n - e^{i\alpha n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}\varphi_k, & n \geqslant 0, \\ \varphi_n - e^{i\beta n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{n-k}\varphi_k, & n < 0, \end{cases} \tag{12}$$

в предположении, что $\alpha/(2\pi) = r_\alpha/m_\alpha$, $\beta/(2\pi) = r_\beta/m_\beta$ — рациональные числа, $(r_\alpha, m_\alpha) = 1$, $(r_\beta, m_\beta) = 1$; $\{\varphi_n\} \in l_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, c_0; $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in l_1$.

Исследование оператора (12) сводится к исследованию оператора Винера — Хопфа (6). Действительно, имеет место следующий факт из теории линейных операторов, обобщающий используемую нами в п. 2° лемму И. Б. Симоненко.

Лемма 2. *Пусть E — банахово пространство, распадающееся в прямую сумму $E = E_+ \oplus E_-$ двух своих подпространств $E_\pm$ с проекторами $P_\pm$ соответственно, и пусть A и B — линейные в E операторы, коммутирующие с проектором P_+ с точностью до вполне непрерывного слагаемого:* $P_+A - AP_+$, $P_+B - BP_+ \in J$. *Для того чтобы оператор $P_+A + P_-B$ был нётеровым в E, необходимо и достаточно, чтобы операторы P_+A, P_-B были* *нётеровы в* E_+, E_- *соответственно, при этом* *

$$\varkappa_E(P_+A+P_-B)=\varkappa_{E_+}(P_+A)+\varkappa_{E_-}(P_-A). \tag{13}$$

Утверждение леммы 2 вытекает из соотношений

$$P_+A+P_-B-(P_+A+P_-)(P_++P_-B)\in J,$$
$$P_+A+P_-B-(P_++P_-B)(P_+A+P_-)\in J$$

и из упомянутой леммы из [3].

Следствие. *В условиях леммы оператор* A *нётеров в* E *тогда и только тогда, когда нётеровы в* $E_\pm$ *операторы* $P_\pm A$ *соответственно, при этом* $\varkappa_E(A)=\varkappa_{E_+}(P_+A)+\varkappa_{E_-}(P_-A)$.

Замечание. Лемма 2 перестает, вообще говоря, быть верной, если отказаться от условий P_+A-AP_+, $P_+B-BP_+\in J$. В качестве примера достаточно взять $E=l_p$, $P_+\varphi=\{\ldots,0,\varphi_{-2},0,\varphi_0,0,\varphi_{-2},\ldots\}$,

$$P_-=I-P_+,\ A\varphi=B\varphi=\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{n-k}\varphi_k\right\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Непосредственно из леммы 2 вытекает

Теорема 5. *Для того чтобы оператор* (12) *был нётеров в* l_p $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, c_0, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sigma_\alpha(t)\overset{\mathrm{def}}{=}1-a(t)\,a(te^{i\alpha})\ldots a[te^{i\alpha(m_\alpha-1)}]\neq 0,$$
$$\sigma_\beta(t)\overset{\mathrm{def}}{=}1-b(t)\,b(te^{-i\beta})\ldots b[te^{-i\beta(m_\beta-1)}]\neq 0,$$

где $a(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_kt^k$, $b(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}b_kt^k$, $|t|=1$. *При выполнении условий нётеровости* $\varkappa(\Pi_1)=-\mathrm{ind}\,\sigma_\alpha^{1/m_\alpha}(t)/\sigma_\beta^{1/m_\beta}(t)$.

Аналогично в случае (4) рассматривается оператор

$$\Pi_2\varphi=\begin{cases}\varphi_n-\gamma_n\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_{n-k}\varphi_k, & n\geqslant 0,\\[2ex] \varphi_n-\gamma_n\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}b_{n-k}\varphi_k, & n<0,\end{cases} \tag{14}$$

где $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}=\mu_+\{1,0,1,0,\ldots\}$ и $\{\gamma_n\}_{n=-\infty}=\mu_-\{\ldots,0,1,0,1\}$. Очевидно, оператор (14) отличается от аналогичного оператора с произвольными $\{\gamma_n\}$ вида (4) лишь вполне непрерывным слагаемым. Символ оператора (14) имеет вид $\sigma_2(t)=1-\mu_+\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_{2k}t^{2k}$, $\sigma_4(t)=1-\mu_-\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}b_{2k}t^{2k}$ и $\varkappa(\Pi_2)=-\mathrm{ind}\,\frac{\sigma_2(t)}{\sigma_4(t)}$.

Очевидно, замечание в п. 2° можно отнести и к парному оператору (14).

Аналогичные утверждения имеют место и для операторов вида

$$\Pi_3\varphi=\begin{cases}\varphi_n-e^{i\alpha n}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_{n-k}\varphi_k, & n\geqslant 0,\\[2ex] \varphi_n-\gamma_n\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}b_{n-k}\varphi_k, & n<0,\end{cases}$$

где $\{\gamma_n\}_{n=-\infty}$ имеет вид (4), а также для операторов с двумя ядрами и для некоторых других.

Ростовский государственный
университет

Поступило
5 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко, ДАН, 194, № 3, 504 (1970). [2] Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко, Изв. АН АрмССР, № 5, 441 (1970). [3] И. Б. Симоненко, Изв. АН АрмССР, сер. матем., 32, в. 5, 1138 (1968). [4] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, УМН, 13, в. 2, 3 (1958).

* В лемме из [3] $B=I$, однако оператор A не обязан «коммутировать» с P_+ (ср. также [4], стр. 15).