Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 1

УДК 518.1 *МАТЕМАТИКА*

В. А. МОРОЗОВ

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ СПЛАЙНОВ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 1 III 1971)

1. Постановка задачи. Пусть A — линейный замкнутый оператор, действующий из H в F, где H и F суть гильбертовы пространства, с областью определения $D_A \subseteq H$. Предполагается, что оператор A имеет ограниченный обратный, определенный на всем F, так что уравнение

$$Au = \bar{f} \tag{1}$$

имеет единственное решение при любом $\bar{f} \in F$.

Определим другой, также линейный и замкнутый, оператор A_0: $H \to F$ с областью определения $D_0 \subseteq D_A$, $\bar{D}_0 = H$, причем выполнены условия:

1) $\bar{u} = A^{-1}\bar{f} \in D_0$;

2) $\|Au\|_F^2 \leqslant \gamma^2(\|u\|_H^2 + \|A_0u\|_F^2), \qquad u \in D_0;$ (2)

$\gamma > 0$ — постоянная.

Зададим в D_0 n линейных линейно-независимых функционалов $l_i(u) \equiv l_i^n(u)$, $i = 1, \ldots, n$, и предположим, что:

3) ядро $N = \{u \in D_0\colon A_0u = 0\}$ оператора A_0 имеет конечную размерность q;

4) $n \geqslant q$; при этом, если $u \in N$ и $l_i(u) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, то $u = 0$;

5) для всякого $u \in D_0$

$$|\|l(u)\|_\varkappa^2 - \|u\|_H^2| \leqslant r_n^2(\|u\|_H^2 + \|A_0u\|_F^2), \quad r_n \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3}$$

и не зависят от $u \in D_0$, $l(u) = (l_1(u), \ldots, l_n(u))$, $\|l(u)\|_\varkappa^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \varkappa_i l_i^2(u)$, $\varkappa_i \equiv \varkappa_i^n > 0$ — весовые множители;

6) если $\hat{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ — произвольный вектор размерности n, то существует по крайней мере один элемент $g \in D_0$ такой, что $l(g) = \hat{g}$. Элемент g называется интерполирующим.

В [1] доказана

Теорема 1. *Пусть $U_{\hat{g}} = \{g \in D_0\colon l(g) = \hat{g}\}$. Существует единственный элемент $s_{\hat{g}}$ такой, что*

1) $s_{\hat{g}} \in U_{\hat{g}}$;

2) $\|A_0 s_{\hat{g}}\|_F = \inf\limits_{u \in U_{\hat{g}}} \|A_0u\|_F.$ (4)

Элемент $s_{\hat{g}}$, удовлетворяющий условиям (4), называется (интерполирующим) сплайном. Если $\hat{g} = l(g)$, $g \in D_0$, то будем полагать $s_{\hat{g}} = s_g$. Пусть $S_n = \{s_{\hat{u}}\colon -\infty < u_i < +\infty, i = 1, \ldots, n\}$.

Основная задача формулируется так: определить сплайн $s_n \in S_n$, удовлетворяющий условию

$$\inf_{s \in S_n} \|As - \bar{f}\|_F^2 = \|As_n - \bar{f}\|_F^2, \tag{5}$$

и изучить его аппроксимативные свойства по отношению к решению уравнения (1).

2. Основные свойства сплайнов. Из [1] следует

Теорема 2. *Для того чтобы элемент $s_{\hat g} \in U_g$ был сплайном, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $v \in V = \{v \in D_0 \colon\ l(v) = 0\}$ выполнялось тождество Эйлера*

$$(A_0 s_{\hat g},\ A_0 v)_F = 0, \quad v \in V. \tag{6}$$

Следствие. *Если $l(g) = \hat g$ и элемент $g \in D_{A_0^* A_0}$, то*

$$\|A_0(g - s_g)\|_F^2 = (A_0^* A_0 g,\ g - s_g)_H.$$

Пусть $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, n$ (единица стоит в i-й позиции). Положим $s_i = s_{e_i}$.

Теорема 3. *Всякий элемент $s_{\hat g} \in S_n$ однозначно представим в виде*

$$s_{\hat g} = \sum_{i=1}^{n} g_i s_i. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь предельные свойства сплайнов при $n \to \infty$.

Теорема 4. *При выполнении условий 3)—5) для любого $g \in D_0$ справедливо соотношение*

$$\lim_{n \to \infty} (\|A_0(g - s_g)\|_F^2 + \|g - s_g\|_H^2) = 0.$$

Доказательство. Так как g является допустимым элементом сравнения, то, очевидно,

$$\|A_0 s_g\|_F \leqslant \|A_0 g\|_F. \tag{8}$$

Полагая в (3) $u = g - s_g$, получаем

$$\|g - s_g\|_H^2 \leqslant \frac{r_n^2}{1 - r_n^2} \|A_0(g - s_g)\|_F^2 = g_n^2 \to 0 \tag{9}$$

при $n \to \infty$. Из (8) и (9), используя свойства слабо сходящихся последовательностей и слабую замкнутость оператора A_0, получаем утверждение теоремы.

Замечание. Оценка (9) характеризует скорость сходимости сплайна s_g к элементу $g \in D_0$ в пространстве H.

Предположим, что $g \in D_{A_0^* A_0}$. Используя следствие из теоремы 2, получаем

$$g_n^2 \leqslant \frac{r_n^4}{(1 - r_n^2)^2} \|A_0^* A_0 g\|_H^2. \tag{10}$$

Отметим, что в рассматриваемом случае справедлива также оценка

$$\|A_0 g - A_0 s_g\|_F^2 \leqslant \|A_0^* A_0 g\|_H g_n. \tag{10'}$$

Пусть E_λ, $0 \leqslant \lambda < +\infty$,— разложение единицы самосопряженного оператора $A_0^* A_0$. Тогда для всякого $g \in D_0$

$$\|A_0 g\|_F^2 = \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda (dE_\lambda g, g) < +\infty, \quad \lambda_0 > 0.$$

Обозначим через A_φ произвольный оператор, действующий из H в F, для которого

$$\|A_\varphi g\|_F^2 = \int_{\gamma_0}^{\infty} \varphi(\lambda) (dE_\lambda g, g) < +\infty, \quad g \in D_\varphi = D_{A_\varphi},$$

где $\varphi(\lambda)$, $\lambda \geqslant \lambda_0$,— произвольная непрерывная положительная функция. Справедлива

Теорема 5. *Пусть при $\lambda \geqslant \lambda_0$ функция φ^{-1} строго выпукла, функция $\lambda^2 \varphi(1/\lambda^2)$ возрастает.*

Тогда

$$\|A_\varphi(g-s_g)\|_F^2 \leqslant q_n^2\varphi(\|A_0(g-s_g)\|_F^2/q_n^2) \leqslant q_n^2\varphi(\|A_0g\|_F^2/q_n^2),$$

где q_n *определяется как в* (9), *если* $g\in D_0$, *и как в* (10), *если* $g\in D_{A_0^*A_0}$. *В частности, если* $\varphi(\lambda)=\lambda^\sigma$, $0<\sigma<1$, *то условия теоремы выполнены и имеет место оценка*

$$\|A_\varphi g - A_\varphi s_g\|_F \leqslant q_n^{1-\sigma}\|A_0(g-s_g)\|_F^\sigma \leqslant g_n^{1-\sigma}\|A_0g\|_F^\sigma. \tag{11}$$

3. Приближенное решение задачи (1). Из теоремы 3 и обратимости оператора A следует

Теорема 6. *Задача* (5) *однозначно разрешима, при этом коэффициенты* u_j *разложения* $s_n=\sum_{j=1}^n u_js_j$ *определяются как решение системы уравнений*

$$\sum_{j=1}^n u_j(As_i, As_j)_F = (As_i, \bar f)_F, \quad i=1,\ldots,n.$$

Пусть $\bar s_n$ — сплайн, определяемый решением $\bar u$ уравнения (1). Тогда, в силу (2) и (5),

$$\|As_n-\bar f\|_F^2 \leqslant \|A\bar s_n-\bar f\|_F^2 \leqslant \gamma^2(\|\bar u-\bar s_n\|_H^2+\|A_0(\bar u-\bar s_n)\|_F^2).$$

Из полученной оценки и теоремы 4 вытекает

Теорема 7. *Для любого* $\bar u\in D_0$ *метод сплайнов сходится, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty}\max\{\|\bar u-s_n\|_H,\ \|As_n-\bar f\|_F\}=0.$$

Если $\bar u\in D_{A_0^*A_0}$, *то невязка* $\|As_n-\bar f\|_F\to 0$, $n\to\infty$, *по крайней мере как* r_n^2.

Замечание. Если выполнено условие

$$\|Au\|_F^2 \leqslant \chi^2(\|u\|_H^2+\|A_\varphi u\|_F^2), \quad u\in D_\varphi, \quad \chi>0=\mathrm{const}, \tag{2'}$$

то, используя теорему 5, также можно дать очевидные оценки скорости сходимости к нулю невязки $\|As_n-\bar f\|_F$.

4. Пример. Проверка выполнения условий 3) — 6), как правило, не вызывает особых затруднений. Рассмотрим для примера случай, когда

$$A_0u\equiv d^ku/dx^k,\ k\geqslant 2,\ A_0\colon L_2[a,b]\to L_2[a,b],$$

а дифференцирование понимается в смысле С. Л. Соболева ([2]). Тогда $q=k$. Определим на отрезке $[a,b]$ равномерную сетку узлов $x_i=a+(i-1)h_n$, $i=1,\ldots,n+1$, $h_n=(b-a)/n$, $n>1$, и положим $l_i(u)=u(x_{i-1/2})$, где $x_{i-1/2}=a+(i-1/2)h_n$. Функционалы $l_i(u)$ определены для любой достаточно гладкой функции. Выполнение 6) следует из существования интерполяционного полинома, проходящего через заданные точки $(x_{i-1/2}, u_i)$. Так как множество N — полиномы степени не выше, чем $k-1$, то 4) выполнено при $n\geqslant k$. Выполнение 5) легко проверяется непосредственно: применяя формулу Тейлора до 2-го порядка включительно с остаточным членом в интегральной форме, получаем оценку

$$\left|\sum_{i=1}^n h_nu^2(x_{i-1/2})-\int_a^b u^2(x)\,dx\right| \leqslant C_kh_n^2(\|u\|_{L_2}^2+\|d^ku/dx^k\|_{L_2}^2),$$

где C_k — некоторая постоянная, не зависящая от h_n.

Техника построения сплайнов достаточно подробно описана в работе ([3]).

5. Выбор аппроксимирующих функционалов. Из предыдущих рассмотрений видно, что точность приближенного решения существенно определяется величиной r_n, характеризующей точность аппроксимации в условии (3). Поэтому естественно выбирать систему функционалов $l_i(u)$, $i = 1, \ldots, n$, так, чтобы порядок аппроксимации был возможно выше, а именно из условия

$$\sup_{u \in D_0} \left| \|l(u)|_{\varkappa}^2 - \|u\|_H^2 \right| / (\|u\|_H^2 + \|A_0 u\|_F^2) - \min \text{ по } l_i, \varkappa_i. \tag{12}$$

В общем случае решение этой задачи нам не известно. Однако, если $H = L_2(\Omega)$, Ω — некоторая достаточно регулярная область конечномерного пространства и функционалы $l_i(u) = u(P_i)$, $i = 1, \ldots, n$, т. е. являются значениями достаточно гладких функций в узловых точках $P_i \in \Omega$, то (12) сводится к выбору оптимальной квадратурной формулы для функций из множества D_0. Если узлы фиксированы, то задача состоит в определении только наилучших коэффициентов $\varkappa_i$ квадратурной формулы. Некоторые из этих задач рассмотрены и решены в работе [4].

Вычислительный центр
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
11 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Морозов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 11, № 2 (1971). [2] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. [3] P. J. Laurent, P. M. Anselone, Num. Math., 12, № 1, 66 (1968). [4] С. М. Никольский, Квадратурные формулы, М., 1958.